ORTAÖĞRETİM
MATEMATİK
TEMEL DÜZEY
DERS KİTABI
11

Nesibe AYDIN

Ahmet CAMUS

Bu kitap, Millî Eğitim Bakanlığı, Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı’nın **18.04.2019** tarih ve **8** sayılı Kurul kararıyla *(listenin 52. sırasında)* **2019 – 2020** öğretim yılından itibaren 5 (beş) yıl süreyle **ders kitabı** olarak kabul edilmiştir.

AYDIN YAYINCILIK VE EĞİTİM HİZMETLERİ İNŞAAT TİCARET VE SANAYİ ANONİM ŞİRKETİ

Haymana Yolu 5. km. Karşıyaka Mah. 577. Sk. Nu.: 1 Gölbaşı / ANKARA

tel.: 0 312. 418 10 02 • belgeç: 0 312. 418 10 09

www.aydinyayincilik.com.tr

Sertifika Nu.: 16753

ISBN

978-605-7710-12-3

●

DİL UZMANI

Helin REÇBER

●

GÖRSEL TASARIM UZMANI

Bora SENGER

●

BASKI



İSTİKLÂL MARŞI

Korkma, sönmez bu şafaklarda yüzen al sancak;
Sönmeden yurdumun üstünde tüten en son ocak.
O benim milletimin yıldızıdır, parlayacak;
O benimdir, o benim milletimindir ancak.

Çatma, kurban olayım, çehreni ey nazlı hilâl!
Kahraman ırkıma bir gül! Ne bu şiddet, bu celâl?
Sana olmaz dökülen kanlarımız sonra helâl.
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl.

Ben ezelden beridir hür yaşadım, hür yaşarım.
Hangi çılgın bana zincir vuracakmış? Şaşarım!
Kükremiş sel gibiyim, bendimi çiğner, aşarım.
Yırtarım dağları, enginlere sığmam, taşarım.

Garbın âfâkını sarmışsa çelik zırhlı duvar,
Benim iman dolu göğsüm gibi serhaddim var.
Ulusun, korkma! Nasıl böyle bir imanı boğar,
Medeniyyet dediğin tek dişi kalmış canavar?

Arkadaş, yurduma alçakları uğratma sakın;
Siper et gövdeni, dursun bu hayâsızca akın.
Doğacaktır sana va'dettiği günler Hakk'ın;
Kim bilir, belki yarın, belki yarından da yakın.

Bastığın yerleri toprak diyerek geçme, tanı:
Düşün altındaki binlerce kefensiz yatanı.
Sen şehit oğlusun, incitme, yazıktır, atanı:
Verme, dünyaları alsan da bu cennet vatanı.

Kim bu cennet vatanın uğruna olmaz ki feda?
Şüheda fışkıracak toprağı sıksan, şüheda!
Cânı, cânânı, bütün varımı alsın da Huda,
Etmesin tek vatanımdan beni dünyada cüda.

Ruhumun senden İlâhî, şudur ancak emeli:
Değmesin mabedimin göğsüne nâmahrem eli.
Bu ezanlar -ki şehadetleri dinin temeli-
Ebedî yurdumun üstünde benim inlemeli.

O zaman vecd ile bin secde eder -varsa- taşım,
Her cerîhamdan İlâhî, boşanıp kanlı yaşım,
Fışkırır ruh-ı mücerret gibi yerden na'şım;
O zaman yükselerek arşa değer belki başım.

Dalgalan sen de şafaklar gibi ey şanlı hilâl!
Olsun artık dökülen kanlarımın hepsi helâl.
Ebediyyen sana yok, ırkıma yok izmihlâl;
Hakkıdır hür yaşamış bayrağımın hürriyyet;
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl!

Mehmet Âkif Ersoy

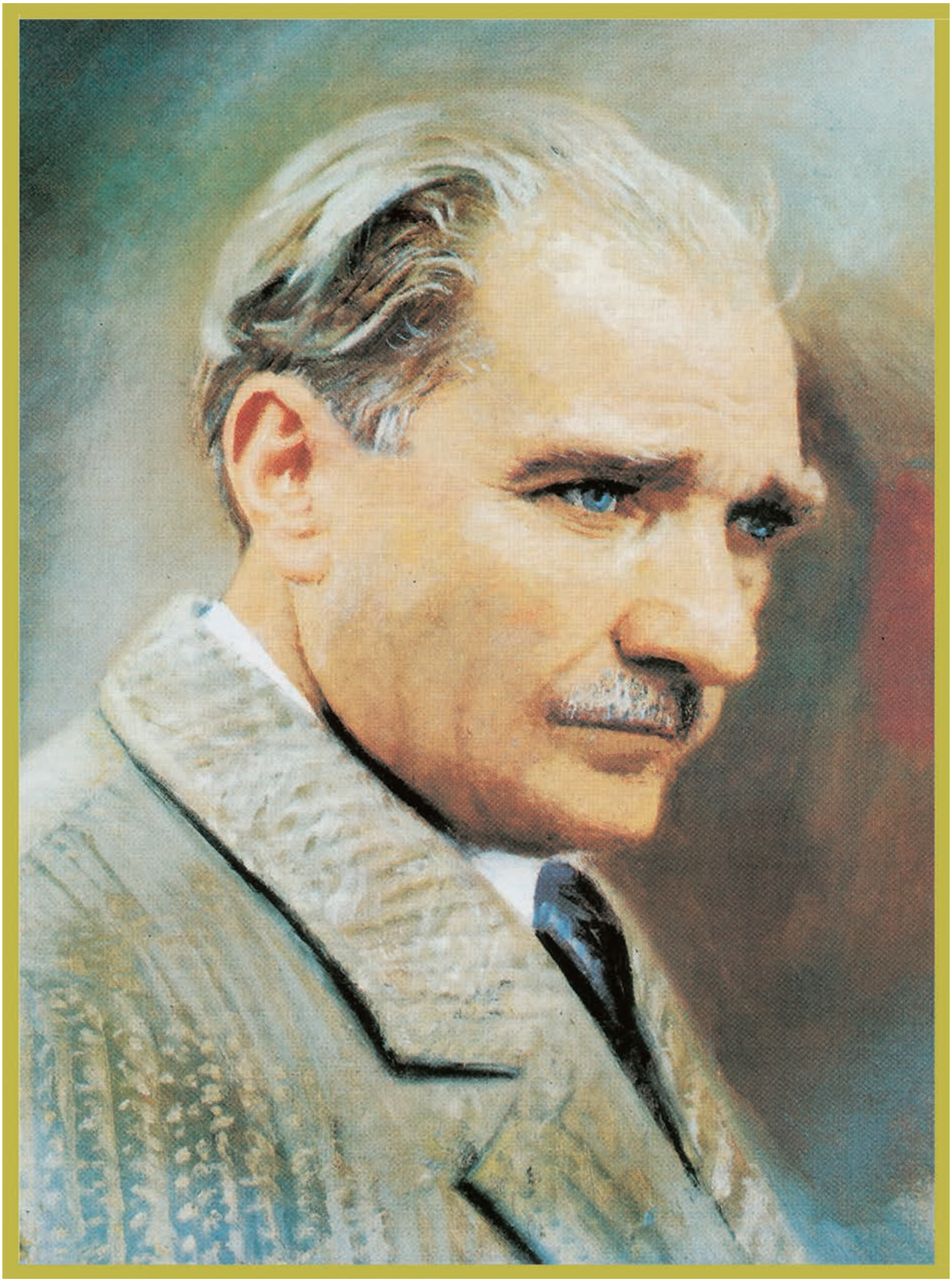
GENÇLİĞE HİTABE

Ey Türk gençliği! Birinci vazifen, Türk istiklâlini, Türk Cumhuriyetini, ilelebet muhafaza ve müdafaa etmektir.

Mevcudiyetinin ve istikbalinin yegâne temeli budur. Bu temel, senin en kıymetli hazinendir. İstikbalde dahi, seni bu hazineden mahrum etmek isteyecek dâhilî ve hâricî bedhahların olacaktır. Bir gün, istiklâl ve cumhuriyeti müdafaa mecburiyetine düşersen, vazifeye atılmak için, içinde bulunacağın vaziyetin imkân ve şeraitini düşünmeyeceksin! Bu imkân ve şerait, çok namüsait bir mahiyette tezahür edebilir. İstiklâl ve cumhuriyetine kastedecek düşmanlar, bütün dünyada emsali görülmemiş bir galibiyetin mümessili olabilirler. Cebren ve hile ile aziz vatanın bütün kaleleri zapt edilmiş, bütün tersanelerine girilmiş, bütün orduları dağıtılmış ve memleketin her köşesi bilfiil işgal edilmiş olabilir. Bütün bu şeraitten daha elîm ve daha vahim olmak üzere, memleketin dâhilinde iktidara sahip olanlar gaflet ve dalâlet ve hattâ hıyanet içinde bulunabilirler. Hattâ bu iktidar sahipleri şahsî menfaatlerini, müstevlîlerin siyasî emelleriyle tevhit edebilirler. Millet, fakr u zaruret içinde harap ve bîtap düşmüş olabilir.

Ey Türk istikbalinin evlâdı! İşte, bu ahval ve şerait içinde dahi vazifen, Türk istiklâl ve cumhuriyetini kurtarmaktır. Muhtaç olduğun kudret, damarlarındaki asil kanda mevcuttur.

Mustafa Kemal Atatürk



MUSTAFA KEMAL ATATÜRK

SEMBOLLER VE GÖSTERİMLER

$\mathbb{N}$	doğal sayılar kümesi	$[AB]$	AB doğru parçası
$\mathbb{Z}$	tam sayılar kümesi	$\lvert AB \rvert$	AB doğru parçasının uzunluğu
$\mathbb{Z}^+$	pozitif tam sayılar kümesi	$\overset{\frown}{AB}$	AB yayı
$\mathbb{Q}$	rasyonel sayılar kümesi	$\lvert \overset{\frown}{AB} \rvert$	AB yayının uzunluğu
$\mathbb{Q}^+$	pozitif rasyonel sayılar kümesi	$m(\overset{\frown}{AB})$	AB yayının ölçüsü
$\mathbb{Q}'$	irrasyonel sayılar kümesi	$\widehat{ABC}$	ABC açısı
$\mathbb{R}$	gerçek sayılar kümesi	$m(\widehat{ABC})$	ABC açısının ölçüsü
$\mathbb{R}^+$	pozitif gerçek sayılar kümesi	$A(\overset{\triangle}{ABC})$	ABC üçgeninin alanı
$\mathbb{C}$	karmaşık sayılar kümesi	$\cong$	eşlik
i	sanal birim	$\sim$	benzerlik
$<$	küçük	$\subset$	alt küme
$\leq$	küçük veya eşit	$//$	paralellik
$>$	büyük	$\perp$	diklik
$\geq$	büyük veya eşit	$=$	eşit
$\varnothing$	boş küme	$\neq$	eşit değil
$n!$	n faktöriyel	$\approx$	yaklaşık
$\sqrt{\ }$	karekök	$\Rightarrow$	ise
x^n	x in n inci kuvveti		

İÇİNDEKİLER

KİTABIMIZI TANIYALIM

BÖLÜM 1.1

Hazır mısınız?

Bölüm 1.1 için Hazırlık Sorular:

1. Aşağıda istenenleri yapınız.
   a. Üç adet doğal sayı yazınız.
   b. Üç adet negatif tam sayı yazınız.
   c. Hem doğal sayı olan hem de rasyonel sayı olan üç sayı yazınız.
   d. Pozitif olmayan bir doğal sayı yazınız.

2. Aşağıda verilen sayılardan hangisi ya da hangileri rasyonel sayıdır?

   I. 0 II. $\frac{\sqrt{4}}{2}$ III. $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{18}}$

   A) Yalnız I B) Yalnız III C) I ve II
   D) II ve III E) I, II ve III

3. Aşağıdaki sayılardan kaç tanesi irrasyonel sayıdır?

   I. -2 II. 0,2 III. $\sqrt{0,04}$
   IV. $0,\overline{5}$ V. $\sqrt{3}$ VI. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

4. Hangi doğal sayının toplama işlemine göre tersi yine bir doğal sayıdır?

5. I. Hem rasyonel hem de irrasyonel olan sayı yalnız sıfırdır.
   II. Devirli ondalık gösterimle ifade edilen sayıların tamamı rasyonel sayıdır.
   III. İki irrasyonel sayının çarpımı daima irrasyoneldir.

   Yukarıdaki ifadelerden hangisi ya da hangileri doğrudur?

   A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III
   D) I ve II E) II ve III

6. Milyonlar bölüğündeki rakamların toplamı 13, binler bölüğündeki rakamların toplamı 10 ve birler bölüğündeki rakamların toplamı da 15 olan en büyük sayıyı yazınız.

7. Aşağıdaki sayı örüntülerinde "□" ile gösterilen verilmeyen terimleri bulunuz.
   a. 2, □, 12, 17, □, 27, ...
   b. −7, −3 □, 5, □, □, ...
   c. 14, □, 2, □, −10, □, ...

2

İlgili bölüme başlamadan hazır bulunuşluğunuzu belirlemenize yardımcı olacak sorular bu başlık altında verilmiştir.

Her işlenişin başında konuya merakınızı arttıracak bilgi veya sorulara yer verilmiştir.

İlgili bölümde neleri öğreneceğinizi gösterir.

İlgili işlenişin günlük hayatla ilişkilendirildiğini gösterir.

İşlenen konu ile ilgili merakınızı uyandıracak bilgileri içerir.

BÖLÜM 3.2

BİLİNÇLİ TÜKETİCİ ARİTMETİĞİ

Bütçe Yönetimi

Neleri Öğreneceğiz?
- Gelir-giderleri göz önüne alarak birey, aile ve kurum bütçesi oluşturabilmeyi,
- Seyahatlerde mümkün olan alternatifleri karşılaştırabilmeyi.

Günlük Hayat Bağlantısı

İnsanların ve diğer canlıların kullandığı vazgeçilmez maddeleri gereği kadar kullanarak idareli tüketmeye tasarruf adı verilir. Yaşadığımız dünyada, canlıların yaşamsal olarak kullandıkları bütün kaynakların, tükenen cinsten kaynaklar olduğu düşünülürse tasarrufun önemi bir kez daha anlaşılmış olur.

Şekil 3.2.1



Yaşamın her alanında tasarruf yapılacak alanlar mevcuttur. Bunların en önemlilerinden biri de paranın tasarrufudur. Gelir gider dengemizi kontrol altında tutarak geleceğimizi garanti altına alabilir ve istenmeyen borçlardan kurtulabiliriz.

Bunları Biliyor musunuz?
TÜİK'in 2013 yılı verilerine göre Türkiye'de bir ailenin tüketim harcamalarının en büyük dört kalemi, %25 ile konut – kira, %19,9 ile gıda, %17,4 ile ulaşım ve son olarak %6,6 ile mobilya – ev aletleridir.

1. Örnek

Aşağıda yapılan bütçe hazırlama çalışmalarını ve Ali'nin ailesine ait giderlerin tablolama yazılımı kullanılarak daire grafiğiyle nasıl ifade edildiğini inceleyelim.

Çözüm

Ali'nin aylık aile bütçesinin gelir gider kalemleri "Şekil 3.2.2" deki tabloda olduğu gibidir.

Ailenin toplam geliri 5400 TL, toplam gideri ise 4550 TL dir. Buna göre Ali'nin ailesi ayda 850 TL, yılda 12 . 850 = 10200 TL birikim yapabilmektedir.

Ali'nin ailesi evlerini kiraya verip başka bir evde kirada oturmak yerine kendi evlerinde otursalardı ayda,

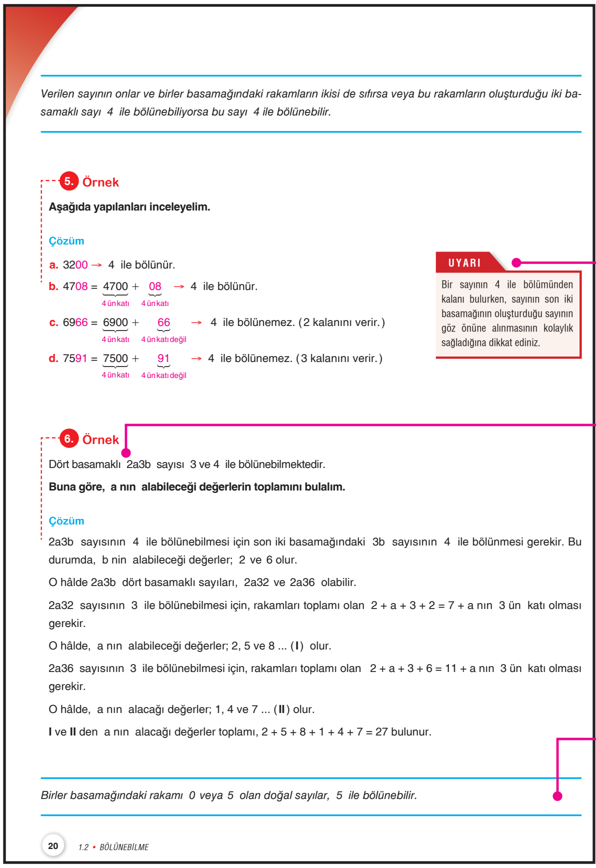
900 – 650 = 250 TL, yılda da 12 . 250 = 3000 TL daha az birikim yapmış olacaklardı.

Sizce gelirleri sabit olan Ali'nin ailesi biraz daha fazla birikim yapmak isterse hangi gider kalemlerinde tasarruf yapmaları daha mantıklı olurdu?

Şekil 3.2.2

Gelirler		Giderler	
Maaşlar	4500	Kira	650
		Aidat	50
		Elektrik F.	85
		Su F.	65
		Doğalgaz F.	100
		Telefon F.	150
Kira Geliri	900	Gıda	900
		Giyim	500
		Eğitim	550
		Sağlık	400
		Kredi Taksiti	850
		Diğer	250

3.2 • BİLİNÇLİ TÜKETİCİ ARİTMETİĞİ 99



Verilen sayının onlar ve birler basamağındaki rakamların ikisi de sıfırsa veya bu rakamların oluşturduğu iki basamaklı sayı 4 ile bölünebiliyorsa bu sayı 4 ile bölünebilir.

5. Örnek

Aşağıda yapılanları inceleyelim.

Çözüm

a. 3200 → 4 ile bölünür.

b. 4708 = 4700 + 08 → 4 ile bölünür. (4'ün katı, 4'ün katı)

c. 6966 = 6900 + 66 → 4 ile bölünemez. (2 kalanını verir.) (4'ün katı, 4'ün katı değil)

d. 7591 = 7500 + 91 → 4 ile bölünemez. (3 kalanını verir.) (4'ün katı, 4'ün katı değil)

UYARI

Bir sayının 4 ile bölümünden kalanı bulurken, sayının son iki basamağının oluşturduğu sayının göz önüne alınmasının kolaylık sağladığına dikkat ediniz.

6. Örnek

Dört basamaklı 2a3b sayısı 3 ve 4 ile bölünebilmektedir.

Buna göre, a nın alabileceği değerlerin toplamını bulalım.

Çözüm

2a3b sayısının 4 ile bölünebilmesi için son iki basamağındaki 3b sayısının 4 ile bölünmesi gerekir. Bu durumda, b nin alabileceği değerler; 2 ve 6 olur.

O hâlde 2a3b dört basamaklı sayıları, 2a32 ve 2a36 olabilir.

2a32 sayısının 3 ile bölünebilmesi için, rakamları toplamı olan $2 + a + 3 + 2 = 7 + a$ nın 3 ün katı olması gerekir.

O hâlde, a nın alabileceği değerler; 2, 5 ve 8 ... (**I**) olur.

2a36 sayısının 3 ile bölünebilmesi için, rakamları toplamı olan $2 + a + 3 + 6 = 11 + a$ nın 3 ün katı olması gerekir.

O hâlde, a nın alacağı değerler; 1, 4 ve 7 ... (**II**) olur.

I ve **II** den a nın alacağı değerler toplamı, $2 + 5 + 8 + 1 + 4 + 7 = 27$ bulunur.

Birler basamağındaki rakamı 0 veya 5 olan doğal sayılar, 5 ile bölünebilir.

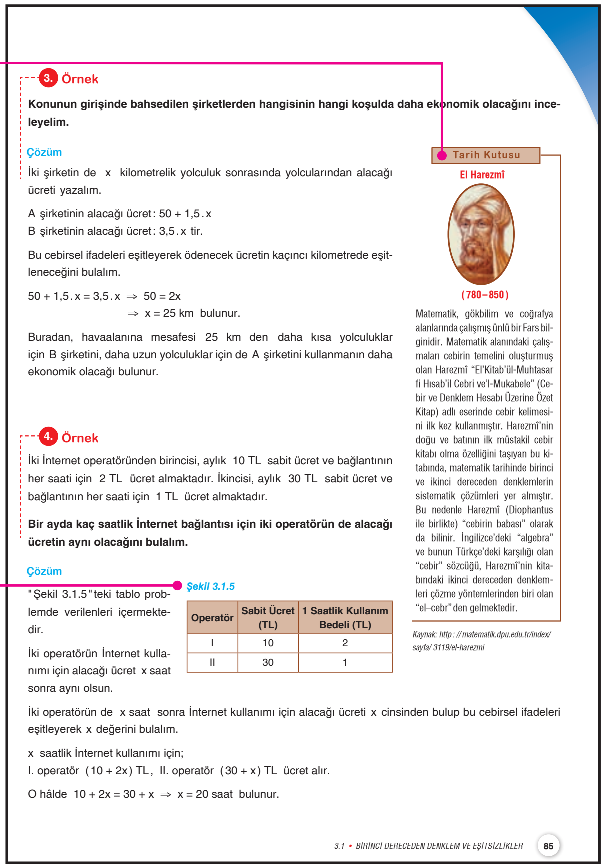
20 1.2 • BÖLÜNEBİLME

İşlenişle ilgili uyarıların verildiği, yönlendirmelerin ve oluşabilecek kavram yanılgılarıyla ilgili açıklamaların yapıldığı bölümdür.

Öncesinde açıklamalarını gördüğünüz konuların uygulamaları bu bölümde yer almaktadır. Her bölüme ait örnekler kendi içinde numaralandırılmıştır.

Konularla ilgili en önemli özellikleri, kısa açıklamaları ya da dikkat etmeniz gereken noktaları bu bölümde bulabilirsiniz.

İşlenen konuyla ilgili tarihsel bilgileri içerir.



3. Örnek

Konunun girişinde bahsedilen şirketlerden hangisinin hangi koşulda daha ekonomik olacağını inceleyelim.

Çözüm

İki şirketin de x kilometrelik yolculuk sonrasında yolcularından alacağı ücreti yazalım.

A şirketinin alacağı ücret: $50 + 1,5 . x$

B şirketinin alacağı ücret: $3,5 . x$ tir.

Bu cebirsel ifadeleri eşitleyerek ödenecek ücretin kaçıncı kilometrede eşitleneceğini bulalım.

$50 + 1,5 . x = 3,5 . x \Rightarrow 50 = 2x$

$\Rightarrow x = 25$ km bulunur.

Buradan, havaalanına mesafesi 25 km den daha kısa yolculuklar için B şirketini, daha uzun yolculuklar için de A şirketini kullanmanın daha ekonomik olacağı bulunur.

Tarih Kutusu

El Harezmî

(780 – 850)

Matematik, gökbilim ve coğrafya alanlarında çalışmış ünlü bir Fars bilginidir. Matematik alanındaki çalışmaları cebirin temelini oluşturmuş olan Harezmî "El'Kitab'ül-Muhtasar fi Hisab'il Cebri ve'l-Mukabele" (Cebir ve Denklem Hesabı Üzerine Özet Kitap) adlı eserinde cebir kelimesini ilk kez kullanmıştır. Harezmî'nin doğu ve batının ilk müstakil cebir kitabı olma özelliğini taşıyan bu kitabında, matematik tarihinde birinci ve ikinci dereceden denklemlerin sistematik çözümleri yer almıştır. Bu nedenle Harezmî (Diophantus ile birlikte) "cebirin babası" olarak da bilinir. İngilizce'deki "algebra" ve bunun Türkçe'deki karşılığı olan "cebir" sözcüğü, Harezmî'nin kitabındaki ikinci dereceden denklemleri çözme yöntemlerinden biri olan "el–cebr" den gelmektedir.

Kaynak: http://matematik.dpu.edu.tr/index/sayfa/3119/el-harezmi

4. Örnek

İki İnternet operatöründen birincisi, aylık 10 TL sabit ücret ve bağlantının her saati için 2 TL ücret almaktadır. İkincisi, aylık 30 TL sabit ücret ve bağlantının her saati için 1 TL ücret almaktadır.

Bir ayda kaç saatlik İnternet bağlantısı için iki operatörün de alacağı ücretin aynı olacağını bulalım.

Çözüm

"Şekil 3.1.5" teki tablo problemde verilenleri içermektedir.

İki operatörün İnternet kullanımı için alacağı ücret x saat sonra aynı olsun.

Şekil 3.1.5

Operatör	Sabit Ücret (TL)	1 Saatlik Kullanım Bedeli (TL)
I	10	2
II	30	1

İki operatörün de x saat sonra İnternet kullanımı için alacağı ücreti x cinsinden bulup bu cebirsel ifadeleri eşitleyerek x değerini bulalım.

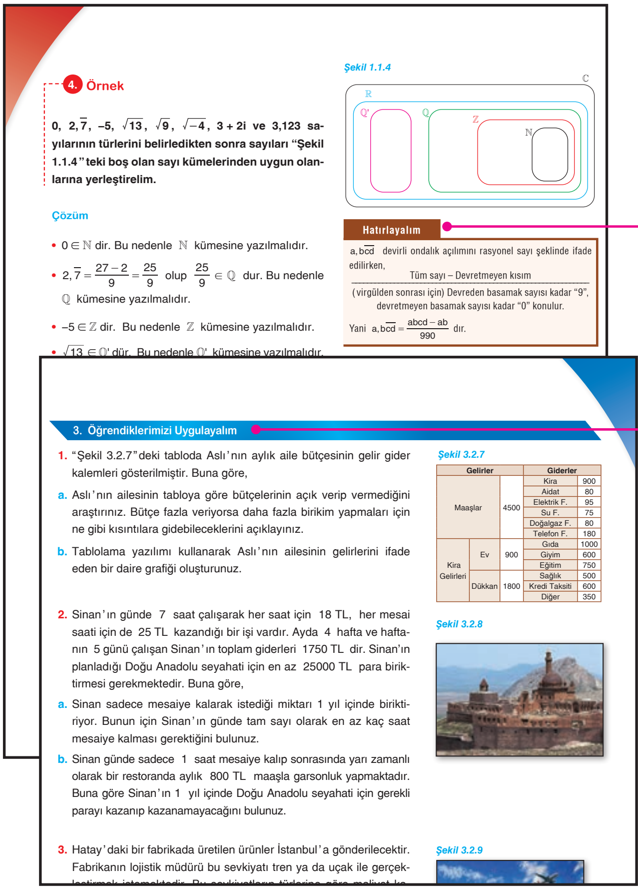
x saatlik İnternet kullanımı için;

I. operatör $(10 + 2x)$ TL, II. operatör $(30 + x)$ TL ücret alır.

O hâlde $10 + 2x = 30 + x \Rightarrow x = 20$ saat bulunur.

3.1 • BİRİNCİ DERECEDEN DENKLEM VE EŞİTSİZLİKLER 85

Her bölümde şekil, grafik ve tablolar kendi içinde numaralandırılmıştır.



4. Örnek

$0,\ 2,\overline{7},\ -5,\ \sqrt{13},\ \sqrt{9},\ \sqrt{-4},\ 3+2i$ ve $3,123$ sayılarının türlerini belirledikten sonra sayıları "Şekil 1.1.4" teki boş olan sayı kümelerinden uygun olanlarına yerleştirelim.

Şekil 1.1.4

Hatırlayalım

$a,b\overline{cd}$ devirli ondalık açılımını rasyonel sayı şeklinde ifade edilirken,

$$\frac{\text{Tüm sayı – Devretmeyen kısım}}{\text{(virgülden sonrası için) Devreden basamak sayısı kadar "9", devretmeyen basamak sayısı kadar "0" konulur.}}$$

Yani $a,b\overline{cd} = \dfrac{abcd - ab}{990}$ dır.

Çözüm

- $0 \in \mathbb{N}$ dir. Bu nedenle $\mathbb{N}$ kümesine yazılmalıdır.
- $2,\overline{7} = \dfrac{27-2}{9} = \dfrac{25}{9}$ olup $\dfrac{25}{9} \in \mathbb{Q}$ dur. Bu nedenle $\mathbb{Q}$ kümesine yazılmalıdır.
- $-5 \in \mathbb{Z}$ dir. Bu nedenle $\mathbb{Z}$ kümesine yazılmalıdır.
- $\sqrt{13} \in \mathbb{Q}'$ dür. Bu nedenle $\mathbb{Q}'$ kümesine yazılmalıdır.

3. Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. "Şekil 3.2.7" deki tabloda Aslı'nın aylık aile bütçesinin gelir gider kalemleri gösterilmiştir. Buna göre,

a. Aslı'nın ailesinin tabloya göre bütçelerinin açık verip vermediğini araştırınız. Bütçe fazla veriyorsa daha fazla birikim yapmaları için ne gibi kısıntılara gidebileceklerini açıklayınız.

b. Tablolama yazılımı kullanarak Aslı'nın ailesinin gelirlerini ifade eden bir daire grafiği oluşturunuz.

Şekil 3.2.7

Gelirler			Giderler	
Maaşlar		4500	Kira	900
			Aidat	80
			Elektrik F.	95
			Su F.	75
			Doğalgaz F.	80
			Telefon F.	180
Kira Gelirleri	Ev	900	Gıda	1000
			Giyim	600
			Eğitim	750
	Dükkan	1800	Sağlık	500
			Kredi Taksiti	600
			Diğer	350

2. Sinan'ın günde 7 saat çalışarak her saat için 18 TL, her mesai saati için de 25 TL kazandığı bir işi vardır. Ayda 4 hafta ve haftanın 5 günü çalışan Sinan'ın toplam giderleri 1750 TL dir. Sinan'ın planladığı Doğu Anadolu seyahati için en az 25000 TL para biriktirmesi gerekmektedir. Buna göre,

a. Sinan sadece mesaiye kalarak istediği miktarı 1 yıl içinde biriktiriyor. Bunun için Sinan'ın günde tam sayı olarak en az kaç saat mesaiye kalması gerektiğini bulunuz.

b. Sinan günde sadece 1 saat mesaiye kalıp sonrasında yarı zamanlı olarak bir restoranda aylık 800 TL maaşla garsonluk yapmaktadır. Buna göre Sinan'ın 1 yıl içinde Doğu Anadolu seyahati için gerekli parayı kazanıp kazanamayacağını bulunuz.

Şekil 3.2.8

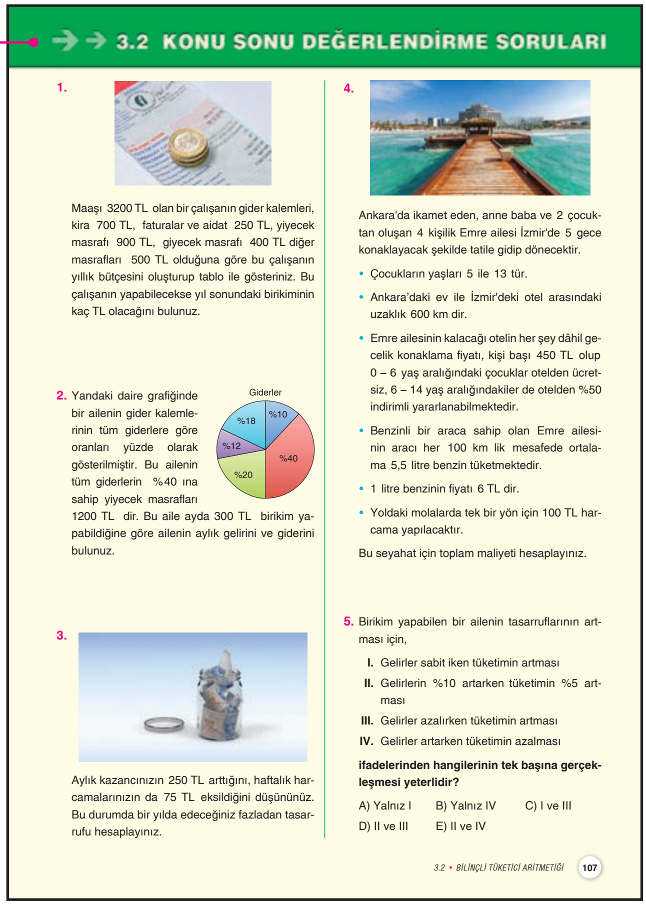
3. Hatay'daki bir fabrikada üretilen ürünler İstanbul'a gönderilecektir. Fabrikanın lojistik müdürü bu sevkiyatı tren ya da uçak ile gerçek-

Şekil 3.2.9

Geçmiş yıllarda öğrendiğiniz bilgilere ait hatırlatmaları içerir.

Öğrendiğiniz konu hakkındaki bilgilerinizi kullanarak cevaplayabileceğiniz sorular bu bölümde yer almaktadır. Bu bölümdeki sorular, işlenişteki örneklere benzerdir. Bu soruları çözerken eksiklerinizin olduğunu tespit ederseniz çözümlü örnekleri tekrar gözden geçirebilir veya öğretmeninizden yardım alabilirsiniz.

Alt öğrenme alanlarındaki bölümlerin sonunda öğrendiklerinizi uygulayabileceğiniz, becerilerinizi gösterebileceğiniz farklı tipte soruların bulunduğu bir alıştırma sayfası yer almaktadır. Her soruda tam olarak ne istendiğini anladıktan sonra soruya cevap vermelisiniz. Tam olarak ne istendiğini kavrayamadığınız sorular olursa ilgili konuyu kitabınızdan tekrar edebilir ya da öğretmeninizden yardım alabilirsiniz.



3.2 KONU SONU DEĞERLENDİRME SORULARI

1. Maaşı 3200 TL olan bir çalışanın gider kalemleri, kira 700 TL, faturalar ve aidat 250 TL, yiyecek masrafı 900 TL, giyecek masrafı 400 TL diğer masrafları 500 TL olduğuna göre bu çalışanın yıllık bütçesini oluşturup tablo ile gösteriniz. Bu çalışanın yapabilecekse yıl sonundaki birikiminin kaç TL olacağını bulunuz.

2. Yandaki daire grafiğinde bir ailenin gider kalemlerinin tüm giderlere göre oranları yüzde olarak gösterilmiştir. Bu ailenin tüm giderlerin %40 ına sahip yiyecek masrafları 1200 TL dir. Bu aile ayda 300 TL birikim yapabildiğine göre ailenin aylık gelirini ve giderini bulunuz.

3. Aylık kazancınızın 250 TL arttığını, haftalık harcamalarınızın da 75 TL eksildiğini düşününüz. Bu durumda bir yılda edeceğiniz fazladan tasarrufu hesaplayınız.

4. Ankara'da ikamet eden, anne baba ve 2 çocuktan oluşan 4 kişilik Emre ailesi İzmir'de 5 gece konaklayacak şekilde tatile gidip dönecektir.

- Çocukların yaşları 5 ile 13 tür.
- Ankara'daki ev ile İzmir'deki otel arasındaki uzaklık 600 km dir.
- Emre ailesinin kalacağı otelin her şey dâhil gecelik konaklama fiyatı, kişi başı 450 TL olup 0 – 6 yaş aralığındaki çocuklar otelden ücretsiz, 6 – 14 yaş aralığındakiler de otelden %50 indirimli yararlanabilmektedir.
- Benzinli bir araca sahip olan Emre ailesinin aracı her 100 km lik mesafede ortalama 5,5 litre benzin tüketmektedir.
- 1 litre benzinin fiyatı 6 TL dir.
- Yoldaki molalarda tek bir yön için 100 TL harcama yapılacaktır.

Bu seyahat için toplam maliyeti hesaplayınız.

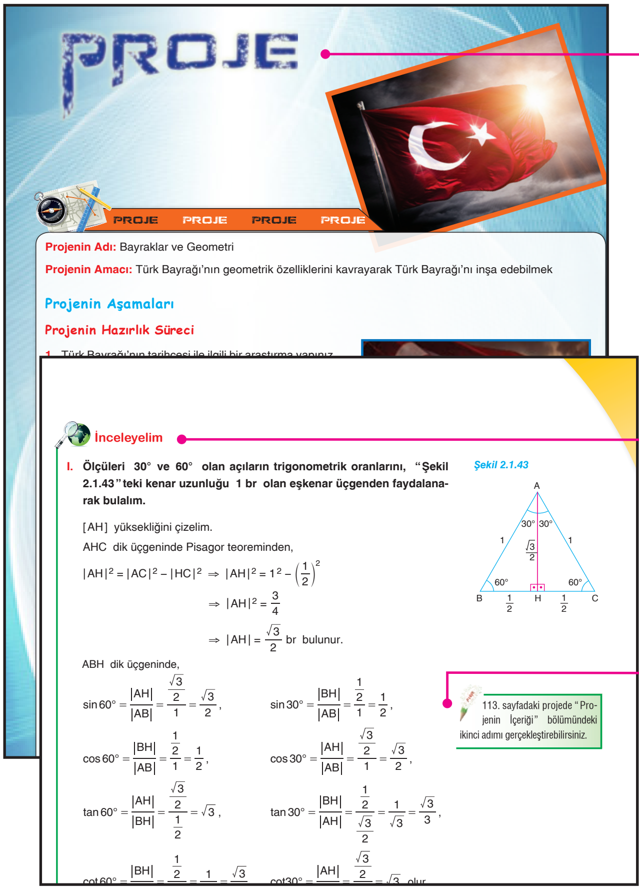
5. Birikim yapabilen bir ailenin tasarruflarının artması için,

I. Gelirler sabit iken tüketimin artması
II. Gelirlerin %10 artarken tüketimin %5 artması
III. Gelirler azalırken tüketimin artması
IV. Gelirler artarken tüketimin azalması

ifadelerinden hangilerinin tek başına gerçekleşmesi yeterlidir?

A) Yalnız I B) Yalnız IV C) I ve III
D) II ve III E) II ve IV

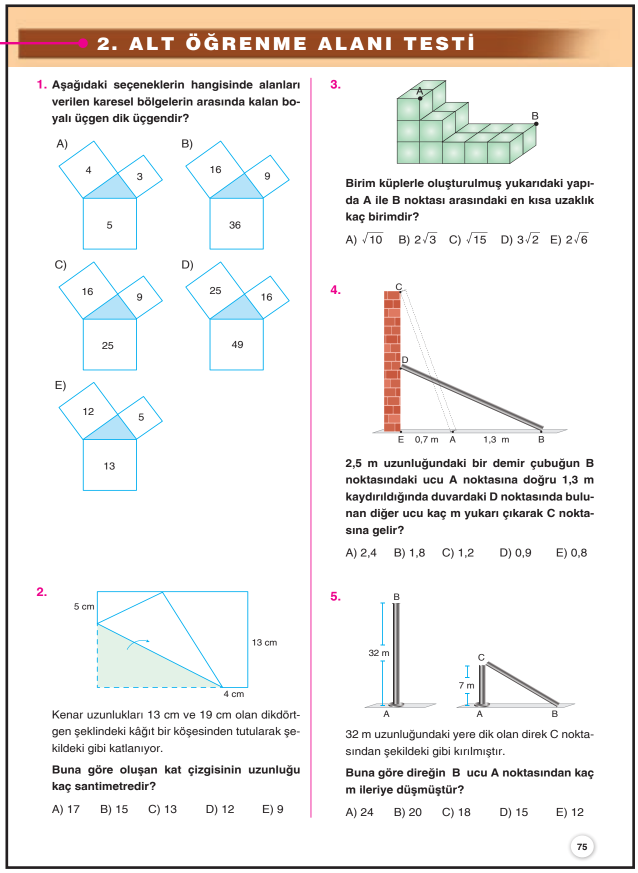
3.2 • BİLİNÇLİ TÜKETİCİ ARİTMETİĞİ 107



Verilen konuyla ilgili araştırmalarınızı ve çalışmalarınızı somutlaştırarak sunabileceğiniz projeleri içerir.

Verilen bilgilerin doğruluğunu, ispatını veya açıklamasını içeren uygulamaların bulunduğu bölümdür.

Proje hazırlama sürecinin ilgili adımlarını bu kutucuğu gördüğünüz yerde gerçekleştirebileceğinize dair yönergelerin bulunduğu bölümdür.



Her alt öğrenme alanının sonunda öğrendiklerinizi ölçmeniz amacıyla hazırlanmış çoktan seçmeli sorulardan oluşan bir teste yer verilmiştir. Öğretmeninizin bu testlerle ilgili değerlendirmelerini dikkate alınız.

1. ALT ÖĞRENME ALANI









SAYILAR

Bölümler

1.1 **Sayı Kümeleri**

1.2 **Bölünebilme**

Günlük yaşantımızda sayıları, geçen zamanı belirtirken, tansiyonumuzu ölçerken, yaşımızı ifade ederken, alışveriş ya da yatırım yaparken kısaca aklımıza gelecek hemen hemen her yerde kullanırız.

Günlük hayatta verilerimizin güvenli bir şekilde saklanabilmesini sağlayan şifreleme bilimlerinde asal sayılar sıklıkla kullanılır. Kullanılan bu sayıların asal olup olmadıkları tespit edilirken bölünebilme kurallarından yararlanılmaktadır.

Burada bir kısmını ifade ettiğimiz sayılar ve bölünebilme kurallarını daha detaylı bir şekilde bu ünitede ele alacağız.

BÖLÜM 1.1

Hazır mısınız?

Bölüm 1.1 için Hazırlık Soruları

1. Aşağıda istenenleri yapınız.

a. Üç adet doğal sayı yazınız.

b. Üç adet negatif tam sayı yazınız.

c. Hem doğal sayı olan hem de rasyonel sayı olan üç sayı yazınız.

d. Pozitif olmayan bir doğal sayı yazınız.

2. Aşağıda verilen sayılardan hangisi ya da hangileri rasyonel sayıdır?

I. 0 **II.** $\frac{\sqrt{4}}{2}$ **III.** $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{18}}$

A) Yalnız I B) Yalnız III C) I ve II

D) II ve III E) I, II ve III

3. Aşağıdaki sayılardan kaç tanesi irrasyonel sayıdır?

I. -2 **II.** $0{,}2$ **III.** $\sqrt{0{,}04}$

IV. $0{,}\overline{5}$ **V.** $\sqrt{3}$ **VI.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$

4. Hangi doğal sayının toplama işlemine göre tersi yine bir doğal sayıdır?

5. **I.** Hem rasyonel hem de irrasyonel olan sayı yalnız sıfırdır.

II. Devirli ondalık gösterimle ifade edilen sayıların tamamı rasyonel sayıdır.

III. İki irrasyonel sayının çarpımı daima irrasyoneldir.

Yukarıdaki ifadelerden hangisi ya da hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III

D) I ve II E) II ve III

6. Milyonlar bölüğündeki rakamların toplamı 13, binler bölüğündeki rakamların toplamı 10 ve birler bölüğündeki rakamların toplamı da 15 olan en büyük sayıyı yazınız.

7. Aşağıdaki sayı örüntülerinde "$\square$" ile gösterilen terimleri bulunuz.

a. 2, $\square$, 12, 17, $\square$, 27, ...

b. −7, −3, $\square$, 5, $\square$, $\square$, ...

c. 14, $\square$, 2, $\square$, −10, $\square$, ...

SAYI KÜMELERİ

Sayı Kümeleri

Neleri Öğreneceğiz?

- Sayı kümelerini birbiriyle ilişkilendirmeyi,
- Doğal sayıların çözümlenmesini gerektiren problemleri çözmeyi,
- Aralarında eşit artışlar bulunan sınırlı sayıdaki doğal sayıların toplamını bulmayı.

Günlük Hayat Bağlantısı

Şekil 1.1.1



Çakıl taşı, diş gibi maddeleri biriktirerek ya da kemik gibi sert malzemelere çentik atarak sayıları ifade eden insanlar yazının gelişmesiyle birlikte sayılar için bazı işaretleri kullanmaya başlamıştır. Erken çağlardan itibaren çeşitli alfabelerde sayıları göstermek için harflerden yararlanılmıştır. Eski Mısır'da kullanılan "Şekil 1.1.1"deki fotoğrafta gösterilen sayılar ve günümüzde de kullanılan Romen rakamları konumsal olmayan sayı işaretleridir. Bir sayı sisteminin konumsal olması, rakamların bulundukları basamaklara göre değer alması demektir. Sayıların basamak değerleri ve bunlarla ilgili işlemleri bu ünitede işleyeceğiz.

Daha önceki sınıflarda öğrendiğiniz sayı kümelerinin tanımları aşağıda hatırlatılmıştır. İnceleyelim.

- *$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...\}$ kümesine doğal sayılar kümesi, bu kümenin her bir elemanına da doğal sayı denir. Doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$ ile gösterilir. Her doğal sayı aynı zamanda bir tam sayıdır.*

- *$\mathbb{Z} = \{..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$ kümesine tam sayılar kümesi, bu kümenin her bir elemanına da tam sayı denir. $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ kümesi pozitif tam sayılar kümesi ve $\mathbb{Z}^- = \{..., -4, -3, -2, -1\}$ kümesi negatif tam sayılar kümesi olarak isimlendirilir.*
  0 sayısı, pozitif ya da negatif sayı olmayıp işareti olmayan bir tam sayıdır. Bu nedenle $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$ şeklinde ifade edilir. Her tam sayı aynı zamanda bir rasyonel sayıdır.

- *$a, b \in \mathbb{Z}$ ve $b \neq 0$ olmak üzere $\frac{a}{b}$ şeklinde iki tam sayının birbirine bölümünden oluşan sayılara rasyonel sayılar denir. Rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Q}$ ile gösterilir. $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z} \text{ ve } b \neq 0 \right\}$ dir.*

  $\mathbb{Q}^+$ ve $\mathbb{Q}^-$ sırasıyla pozitif ve negatif rasyonel sayılar kümesini göstermek üzere $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$ dır.

- *Ondalık açılımı; $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ ve $b \neq 0$ olmak üzere $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılamayan (virgülden sonraki kısmı bir düzen içermeyen) sayıların kümesine irrasyonel sayılar kümesi denir. Bu küme $\mathbb{Q}'$ sembolü ile ifade edilir.*

- *Rasyonel ve irrasyonel sayılar kümelerinin birleşim kümesine gerçek (reel) sayılar kümesi adı verilir. Bu küme $\mathbb{R}$ sembolü ile gösterilir.*

$$\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$$

- *$a, b \in \mathbb{R}$ ve $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere $a + ib$ biçimindeki sayılara karmaşık sayı, karmaşık sayılardan oluşan kümeye karmaşık sayılar kümesi denir. Karmaşık sayılar kümesi $\mathbb{C}$ ile gösterilir. $\mathbb{C} = \left\{ a + ib \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R},\ i = \sqrt{-1} \right\}$*

- Doğal sayılar, tam sayılar, rasyonel sayılar, gerçek sayılar ve karmaşık sayılar kümelerinin arasında aşağıdaki ilişki vardır.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

---

1. Örnek

$\frac{2}{5}$, $3,\overline{2}$ ve $\sqrt{2}$ nin hangi sayı kümelerine ait olduklarını bulalım.

Çözüm

- $\frac{2}{5}$ iki tam sayının oranı olarak yazılabildiğinden bir rasyonel sayıdır.

- $3,\overline{2} = 3,222...$ devirli ondalık açılımını iki tam sayının oranı şeklinde yazmaya çalışalım.

  A = 3,222... olsun. $3,\overline{2}$ sayısında devreden basamak adedi 1 olduğundan A sayısını 10^1 ile çarpalım.

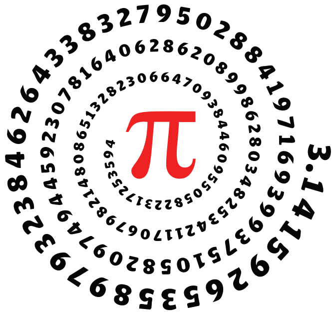
  10 . A = 32,22... olur. 10 . A ve A sayılarını taraf tarafa çıkaralım.

$$\begin{array}{r} 10.A = 32,22... \\ - \quad A = 3,222... \\ \hline 9.A = 29 \end{array} \Rightarrow A = \frac{29}{9} \text{ bulunur.}$$

O hâlde $3,\overline{2}$ sayısı, iki tam sayının oranı şeklinde yazılabildiğinden bir rasyonel sayıdır.

- $\sqrt{2} = 1,41421356...$ sayısı devirli ondalık sayı şeklinde yazılamadığından iki tam sayının oranı biçiminde gösterilemez. Bu nedenle $\sqrt{2}$ sayısı irrasyonel sayıdır.

Bunları Biliyor musunuz?



Matematikteki en gizemli sayılardan biri olan pi (π), papirüslere yapılan hesaplamalardan günümüze kadar uzanan bir geçmişe sahiptir.

Pi, bir çemberin çevresinin çapına oranı olan ve tüm çemberlerde aynı sonucu veren matematiksel bir sabittir. Tarih boyunca farklı matematikçiler tarafından birçok farklı değerde kullanılan pi sayısının günümüzde herkes tarafından kabul görmüş sonsuz basamaklı ve herhangi bir düzen içermeyen bir açılımı vardır. Pi sayısının bu sonsuz sayıda basamaklarından mümkün olan en fazlasını ezberlemeye çalışan insanların oluşturduğu topluluklar, bu sayının ne kadar gizemli olduğuna dair ipuçları vermektedir.

2. Örnek

Günlük Hayat Bağlantısı

Sporcuların yardımlaşma, dayanışma, paylaşma ve özgüven sahibi olma özelliklerini geliştiren takım sporlarından basketbol, 1891 yılında ABD'de görev yapan Kanadalı bir beden eğitimi öğretmeni tarafından tasarlanmıştır. Beşer kişilik iki takımın mücadele ettiği bir takım oyunu olan basketbolda amaç el ile idare edilen topun pota adı verilen çemberden geçirilmesidir. Saha ölçüleri, 28 m x 15 m standartlarında ve dikdörtgen şeklindedir.

Buna göre basketbol sahasının köşegen uzunluğunu ifade eden sayının hangi sayı kümelerine ait olduğunu bulalım.

Şekil 1.1.2



Çözüm

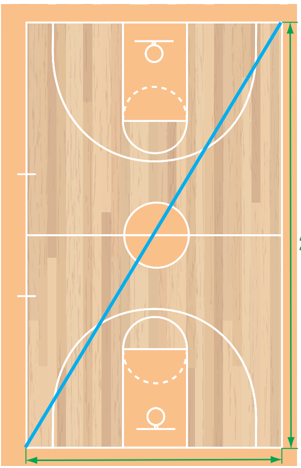
Sahanın köşegen uzunluğunu Pisagor teoremini kullanarak bulalım:

$$x^2 = 28^2 + 15^2 \Rightarrow x = \sqrt{28^2 + 15^2}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{1009} \text{ m dir.}$$

$\sqrt{1009}$ sayısı $\frac{a}{b}$, $(a, b \in \mathbb{Z}$ ve $b \neq 0)$ şeklinde yazılamayan (kök dışına çıkamayan) bir sayı olduğundan irrasyonel sayıdır. İrrasyonel sayılar kümesi, gerçek sayılar ve karmaşık sayılar kümelerinin bir alt kümesi olduğundan köşegen uzunluğunu ifade eden sayı aynı zamanda bu kümelerin de bir elemanıdır.

Şekil 1.1.3



> **Hatırlayalım**
>
> Dik kenar uzunlukları a br ve b br, hipotenüs uzunluğu da c br olan bir dik üçgende Pisagor teoreminin $a^2 + b^2 = c^2$ olduğunu 9. sınıfta öğrenip bu teoremi kullanarak günlük hayat problemleri çözdüğünüzü hatırlayınız.

3. Örnek

Aşağıdaki denklemlerin köklerini bularak bu köklerin hangi sayı kümelerinin elemanları olduğunu bulalım.

a. $2x - 4 = 2$ **b.** $x^2 - 1 = 0$ **c.** $x^2 + 4 = 0$

Çözüm

a. $2x - 4 = 2 \Rightarrow 2x = 6$

$\Rightarrow x = 3$ tür.

3 sayısı bir doğal sayı, tam sayı, rasyonel sayı, gerçek sayı ve karmaşık sayı olup bu kümelerin bir elemanıdır.

b. $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$

$\Rightarrow x = 1$ veya $x = -1$ dir.

1 sayısı bir doğal sayıdır. Bunun yanında −1 ve 1 sayıları birlikte bir tam sayı, rasyonel sayı, gerçek sayı ve karmaşık sayı olup bu kümelerin elemanlarıdır.

c. $x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{-4}$

$\Rightarrow x = 2i$ veya $x = -2i$ dir.

Bulduğumuz −2i ve 2i kökleri karmaşık sayı olduğundan bu sayılar karmaşık sayılar kümesinin elemanlarıdır.

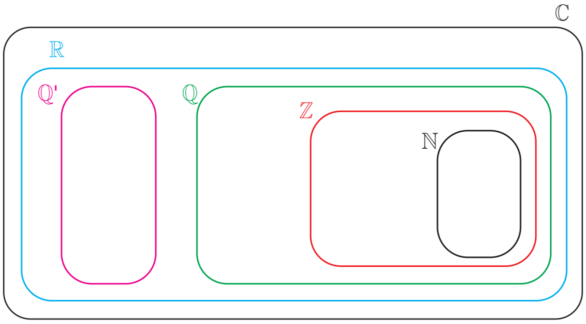
> **Tarih Kutusu**
>
> **Carl Friedrich Gauss**
> ***(Karl Firidrih Gaus)***
>
> 
>
> **(1777−1855)**
> *(Temsilî resimdir.)*
>
> Alman kökenli bir matematikçi ve bilim insanı olan Gauss, sayılar kuramı, analiz, diferansiyel geometri, jeodezi, elektrik, manyetizma, astronomi ve optik alanlarında çalışmalar yapmıştır. “Matematikçilerin prensi” ve “Antik Çağlardan beri yaşamış en büyük matematikçi” olarak da bilinen Gauss, matematiğin ve bilimin pek çok alanını etkilemiştir. Tarihin en nüfuzlu matematikçilerden biri olarak kabul edilen Gauss, pek çok keşfini 20 yaşına gelmeden yapmış ve sanal sayıları $(i = \sqrt{-1})$ ilk kez kullanarak matematikte çığır açmıştır.

Kaynak: http://matematik.dpu.edu.tr/index/sayfa/3127/carl–friedrich–gauss

4. Örnek

$0,\ 2,\overline{7},\ -5,\ \sqrt{13},\ \sqrt{9},\ \sqrt{-4},\ 3+2i$ ve $3{,}123$ sayılarının türlerini belirledikten sonra sayıları "Şekil 1.1.4" teki boş olan sayı kümelerinden uygun olanlarına yerleştirelim.

Şekil 1.1.4



Çözüm

- $0 \in \mathbb{N}$ dir. Bu nedenle $\mathbb{N}$ kümesine yazılmalıdır.
- $2,\overline{7} = \dfrac{27-2}{9} = \dfrac{25}{9}$ olup $\dfrac{25}{9} \in \mathbb{Q}$ dur. Bu nedenle $\mathbb{Q}$ kümesine yazılmalıdır.
- $-5 \in \mathbb{Z}$ dir. Bu nedenle $\mathbb{Z}$ kümesine yazılmalıdır.
- $\sqrt{13} \in \mathbb{Q}'$ dür. Bu nedenle $\mathbb{Q}'$ kümesine yazılmalıdır.
- $\sqrt{9} = 3$ olup $3 \in \mathbb{N}$ dir. Bu nedenle $\mathbb{N}$ kümesine yazılmalıdır.
- $\sqrt{-4} = 2i$ olup $2i \in \mathbb{C}$ dir. Bu nedenle $\mathbb{C}$ kümesine yazılmalıdır.
- $3+2i \in \mathbb{C}$ dir. Bu nedenle $\mathbb{C}$ kümesine yazılmalıdır.
- $3{,}123 \in \mathbb{Q}$ dur. Bu nedenle $\mathbb{Q}$ kümesine yazılmalıdır.

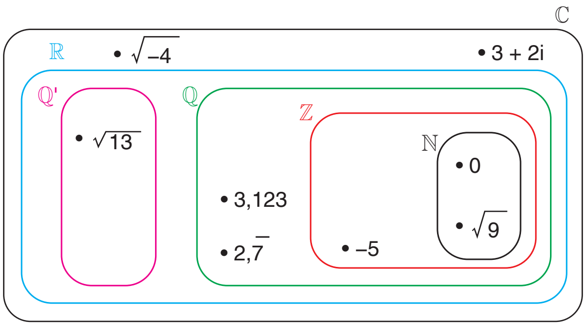
Hatırlayalım

$a,\overline{bcd}$ devirli ondalık açılımını rasyonel sayı şeklinde ifade edilirken,

$$\frac{\text{Tüm sayı} - \text{Devretmeyen kısım}}{\text{(virgülden sonrası için) Devreden basamak sayısı kadar "9", devretmeyen basamak sayısı kadar "0" konulur.}}$$

Yani $a,\overline{bcd} = \dfrac{abcd - ab}{990}$ dır.

Şekil 1.1.5



Verilen sayıların ilgili kümelere yerleştirilmiş hâli "Şekil 1.1.5" teki gibidir.

5. Örnek

$A = \sqrt{2} - 1,\ B = \sqrt{2} + 1$ ve $C = \sqrt{2}$ olmak üzere aşağıdaki ifadelerden hangilerinin sonuçlarının rasyonel sayı olduğunu bulalım.

a. $A + B$ **b.** $A^2 - 2C$ **c.** $\dfrac{B}{C}$ **d.** $A \cdot B$

Çözüm

a. $A + B = \sqrt{2} - 1 + \sqrt{2} + 1 = 2\sqrt{2}$ olup sonuç bir irrasyonel sayıdır.

b. $A^2 - 2C = (\sqrt{2} - 1)^2 - 2\sqrt{2} = (2 - 2\sqrt{2} + 1) - 2\sqrt{2} = 3 - 4\sqrt{2}$ olup sonuç bir irrasyonel sayıdır.

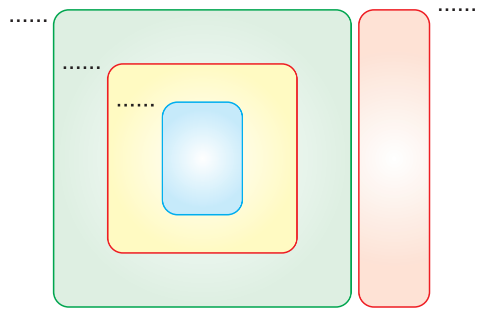
c. $\dfrac{B}{C} = \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}+1}{\underset{(\sqrt{2})}{\sqrt{2}}} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$ olup sonuç bir irrasyonel sayıdır.

d. $A \cdot B = (\sqrt{2} - 1) \cdot (\sqrt{2} + 1) = \sqrt{2}^{\,2} - 1^2 = 2 - 1 = 1$ olup sonuç bir rasyonel sayıdır.

1. Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. "Şekil 1.1.6"da verilen kümelerden her biri, doğal sayılar, tam sayılar, rasyonel sayılar ve irrasyonel sayılar kümelerinden birini temsil etmektedir. Buna göre $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}$ ve $\mathbb{Q}'$ sembollerinden uygun olanını seçip kümeleri adlandırınız. Adlandırdığınız kümelerin içlerine de uygun olacak şekilde birer eleman yazınız.

Şekil 1.1.6



2. Aşağıdaki sayılardan hangilerinin karesi irrasyonel bir sayı olduğu halde, kendisinin 2 fazlasıyla çarpımı bir rasyonel sayıdır?

I. $\sqrt{2}$ **II.** $\sqrt{3}-1$ **III.** $\pi-2$ **IV.** $2\frac{2}{3}$

Sayıların Çözümlenmesi

Hemen hemen insanlık tarihi kadar eski bir uygulama olan sayma işlemi, Mayalar ve Aztekler gibi bazı eski topluluklarda ayak parmakları da sayma işinde kullanıldığından yirmi tabanı kullanılarak yapılmaktaydı. Ancak günümüzde sayı sayma işlemi daha çok on parmakla yapıldığından kullanılan mevcut sayı sistemlerinin çoğu on tabanına dayanır. Bu bölümde on tabanındaki sayı sistemimizle ilgili hesaplamalar yapacağız.

Şekil 1.1.7



Bir doğal sayıyı oluşturan rakamların her birinin, o sayının içindeki konumuna basamak denir. Rakamların sayıda bulunduğu basamağa göre aldığı değere de basamak değeri denir. Basamak değerlerinin toplamı o sayının çözümlenmesidir.

$(abc) = 100a + 10b + c$ dir.

- c → birler basamağı
- b → onlar basamağı
- a → yüzler basamağı

Aşağıda iki ve üç basamaklı çözümleme örneklerinden bazıları gösterilmiştir.

- $ab = 10a + b$
- $abc = 100a + 10b + c$
- $aaa = 111a$
- $ab + ba = 11(a + b)$
- $ab - ba = 9(a - b)$
- $abc - cba = 99(a - c)$

6. Örnek

İki basamaklı, rakamları sıfırdan farklı bir sayının rakamları yer değiştirdiğinde sayının değeri 72 azalıyor. Buna göre ilk sayının kaç olduğunu bulalım.

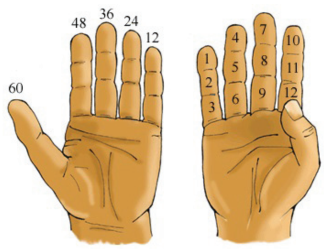
Çözüm

İki basamaklı bir sayı ab, rakamlar yer değiştirdiğinde elde edilen sayı da ba olsun. Bu durumda,

$$ab - ba = 72 \Rightarrow 10a + b - (10b + a) = 72$$
$$9a - 9b = 72$$
$$9(a - b) = 72$$
$$a - b = 8 \text{ bulunur.}$$

Rakamları arasındaki farkın 8 olduğu sayılar 91 ve 80 dir. Ancak rakamların sıfırdan farklı olduğu belirtildiğinden ilk sayı 91 bulunur.

Bunları Biliyor musunuz?



Bir elin dört parmağında on iki eklem ve diğer elde beş parmak bulunduğundan 5 x 12 = 60 lık sayı sistemini Babilliler milattan önceki devirlerde keşfederek kullanmıştır. Bu yüzden bu sayı sistemine Babil sayı sistemi adı verilmiştir.

Günümüzde 1 dakikanın 60 saniye, 1 saatin 60 dakika, çemberin 360 (6 x 60) derece olmasının Babil matematiğine dayandığını biliyor muydunuz?

7. Örnek

İki basamaklı bir sayının değeri, rakamları toplamının 4 katına eşittir. Buna göre bu koşulu sağlayan iki basamaklı sayıların toplamını bulalım.

Çözüm

İki basamaklı sayı bir ab olsun. Bu durumda,

$$ab = 4(a + b) \Rightarrow 10a + b = 4a + 4b$$
$$6a = 3b$$
$$2a = b \text{ bulunur.}$$

Birler basamağındaki rakamı, onlar basamağındaki rakamın iki katı olan iki basamaklı sayılar: 12, 24, 36 ve 48 olup toplamları

$$12 + 24 + 36 + 48 = 120 \text{ bulunur.}$$

8. Örnek

Dört basamaklı AAAA sayısının, iki basamaklı AA sayısının kaç katı olduğunu bulalım.

Çözüm

I. Yol: Sonucu çözümleme işlemi yaparak bulalım. $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$AAAA = k.AA \Rightarrow 1000A + 100A + 10A + A = k.(10A + A)$$
$$\Rightarrow 1111.A = k.11.A$$
$$\Rightarrow k = \frac{1111.A}{11.A}$$
$$\Rightarrow k = 101 \text{ bulunur.}$$

II. Yol: Sonucu bölme işlemi yaparak bulalım.

$$\begin{array}{r|l} AAAA & AA \\ \underline{-\ AA\downarrow\downarrow} & 101 \\ 00AA & \\ \underline{-\ \ \ AA} & \\ 00 & \end{array}$$

Buna göre AAAA sayısı, AA sayısının 101 katıdır.

9. Örnek

Üç basamaklı, rakamları farklı bir sayının yüzler ve birler basamakları yer değiştirdiğinde sayının değeri 594 azalmaktadır. Bu koşulu sağlayan en büyük sayıyı bulalım.

Çözüm

Üç basamaklı sayı ABC olsun.

$$ABC - CBA = 594 \Rightarrow 100A + 10B + C - (100C + 10B + A) = 594$$
$$\Rightarrow 99A - 99C = 594$$
$$\Rightarrow 99(A - C) = 594$$
$$\Rightarrow A - C = 6 \text{ bulunur.}$$

$A - C = 6$ koşulunu sağlayan en büyük rakamlar 9 ve 3 tür. B rakamı için de bulduğumuz iki rakamdan farklı olan en büyük rakam olan 8 seçilirse ABC üç basamaklı sayısının en büyük değeri 983 bulunur.

10. Örnek

ab ve ba iki basamaklı sayılar olmak üzere, $\frac{ab - ba}{ab + ba} = \frac{27}{55}$ ifadesini sağlayan iki basamaklı ab sayılarının toplamını bulalım.

Çözüm

ab ve ba iki basamaklı sayılar olduğundan çözümleme yaparak ifadeyi sadeleştirelim.

$$\frac{ab - ba}{ab + ba} = \frac{27}{55} \Rightarrow \frac{10a + b - 10b - a}{10a + b + 10b + a} = \frac{27}{55} \Rightarrow \frac{9(a - b)}{11(a + b)} = \frac{27}{55}$$
$$\Rightarrow \frac{(a - b)}{(a + b)} = \frac{3}{5} \quad \textit{(sadeleştirme yaptık.)}$$
$$\Rightarrow 5a - 5b = 3a + 3b \quad \textit{(içler dışlar çarpımı yaptık.)}$$
$$\Rightarrow 2a = 8b$$
$$\Rightarrow a = 4b \text{ dir.}$$

$a = 4b$ olan yani onlar basamağındaki rakamı birler basamağındakinin 4 katı olan iki basamaklı sayılar 41 ve 82 dir. O hâlde bu sayıların toplamı,

$41 + 82 = 123$ bulunur.

11. Örnek

Üç basamaklı beş tane sayının toplamı 5000 dir. Toplanan her bir sayının yüzler basamağındaki rakamı 1 arttırılır, onlar basamağındaki rakamı 6 azaltılır ve birler basamağındaki rakamı da 4 azaltılırsa yeni toplamın kaç olacağını bulalım.

Çözüm

Bir sayının yüzler basamağındaki rakamı 1 arttırılırsa sayının değeri $1 . 100 = 100$ artar.

Onlar basamağındaki rakamı 6 azaltılırsa sayının değeri $6 . 10 = 60$ azalır.

Birler basamağındaki rakamı 4 azaltılırsa sayının değeri $4 . 1 = 4$ azalır.

Bu işlemler bir sayı için,

$100 - 60 - 4 = 36$ artış anlamına gelmektedir.

Bu değişimler her bir sayıya uygulanırsa toplam artış, $5 . 36 = 180$ olup yeni toplam,

$5000 + 180 = 5180$ olarak bulunur.

12. Örnek

abc, cab ve bca üç basamaklı, xyz6 da dört basamaklı sayılardır.

abc + cab + bca = xyz6 olduğuna göre xyz üç basamaklı sayısının alabileceği en büyük değeri bulalım.

Çözüm

Verilen eşitlikte çözümleme yaparak gerekli düzenlemeleri yapalım.

$abc + cab + bca = xyz6 \Rightarrow 111a + 111b + 111c = xyz6$

$\Rightarrow 111(a + b + c) = xyz6$ bulunur.

Buradan xyz6 dört basamaklı sayısının 111 in $(a + b + c)$ katı olduğu görülür. Ayrıca 111 ile çarpılan $(a + b + c)$ sayısının sonucu xyz6 olduğundan $(a + b + c)$ nın birler basamağı 6 olacaktır. O hâlde $(a + b + c)$, 6, 16 veya 26 olabilir (üç rakamın toplamı en çok 27 olabilir.).

$a + b + c = 6$ alınırsa $111 . (a + b + c)$ üç basamaklı olacağından eşitlik sağlanmaz.

$a + b + c = 16$ alınırsa sonuç $111 . 16 = 1776$ bulunur.

$a + b + c = 26$ alınırsa en büyük sonuç $111 . 26 = 2886$ bulunur.

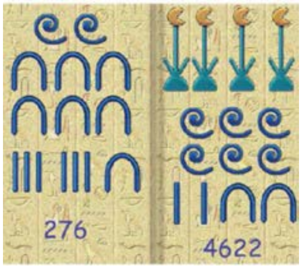
Bu durumda, $x = 2$, $y = 8$ ve $z = 8$ dir.

O hâlde üç basamaklı xyz sayısı 288 bulunur.

2. Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. Eski Mısırlılar, hiyeroglif ile gösterilen 10 tabanlı bir sayı sistemine sahiptiler. Bugün Paris Louvre (Luvğ) Müzesi'nde sergilenen MÖ 1500 yıllarında Mısır'da yazılmış bir taş tablet üzerindeki 276 sayısının 2 yüz, 7 on ve 6 birden oluştuğu "Şekil 1.1.8"deki gibi gösterilmiştir. 4622 sayısının gösterimi de benzer şekilde yapılmıştır. Buna göre,

Şekil 1.1.8



a. Aşağıda verilen sayıları benzer şekilde çözümleyiniz.

I. 132 **II.** 1205

b. Aşağıda çözümlenmiş hâlleri verilen sayıları yazınız.

I.



II.



2. İki basamaklı bir sayı, rakamlarının sayı değerlerinin toplamının 5 katıdır. Buna göre, bu sayı kaçtır?

3. En az üç basamaklı bir doğal sayının onlar basamağındaki rakamının sayı değeri 2 azaltılıp yüzler basamağındaki rakamının sayı değeri 1 artırılırsa bu sayı ne kadar artar?

4. a3b + ba3 + 3ba = 1665 olduğuna göre, a4b + ba4 + 4ba kaçtır?

Eşit Miktarda Artarak Devam Eden Sınırlı Sayıdaki Doğal Sayıların Toplamı

İspanya'nın Katalonya özerk bölgesinde her yıl, geçmişi 18. yüzyıla dayanan geleneksel en yüksek insan kulesi yarışması düzenlenmektedir. Yandaki fotoğrafta gösterilen ve "Castells" (kasteys) olarak adlandırılan insan kuleleri Birleşmiş Milletler Eğitim, Bilim ve Kültür Örgütü UNESCO'nun 'somut olmayan dünya mirası' listesinde yer almaktadır.

Şekil 1.1.9



Sizce en üst katında 1 kişi olan ve hep bir alttaki katında üst kattakinden 1 fazla kişi bulunduran 9 katlı bir insan kulesini inşa etmek için kaç kişiye ihtiyaç vardır? *(13. sayfadaki "14. Örnek"e bakınız.)*

Eşit miktarda artarak devam eden sınırlı sayıdaki doğal sayıların;

- *Kaç tane olduğunu (terim sayısını) bulmak için* $\dfrac{\text{Son Terim} - \text{İlk Terim}}{\text{Artış Miktarı}} + 1$ *formülü kullanılır.*
- *Ortanca terimini bulmak için* $\dfrac{\text{Son Terim} + \text{İlk Terim}}{2}$ *formülü kullanılır.*
- *Toplamını bulmak için de aşağıdaki formül kullanılır.*

Terimlerin Toplamı = Terim Sayısı . Ortanca Terim

13. Örnek

"Şekil 1.1.10" daki fotoğrafta küplerle yapılmış bir kule gösterilmiştir. Buna göre bu kule yapılırken kullanılan küp sayısını yukarıda verilen formülü kullanarak bulalım.

Şekil 1.1.10



Çözüm

I. Yol: Fotoğrafta gösterilen kule 5 katlı olup yukarıdan aşağıya her katında sırasıyla 1, 2, 3, 4 ve 5 küp kullanılmıştır. Küp sayıları, ardışık iki terimlerinin arasındaki fark 1 olduğundan (birer birer arttığından) bir sayı örüntüsü belirtir. 1, 2, 3, 4 ve 5 ten oluşan sayı örüntüsünde 5 terim bulunup ortanca terimi de $\dfrac{1+5}{2} = 3$ tür.

O hâlde

Terimlerin toplamı = Terim Sayısı . Ortanca Terim
= 5 . 3 = 15 bulunur.

Özel olarak 1 den başlayan ardışık doğal sayıların toplamı, son terim n olmak üzere;

Terimlerin Toplamı = $\dfrac{n.(n+1)}{2}$ *şeklinde bulunur.*

II. Yol: 1 den başlayarak 5 e kadar devam eden ardışık doğal sayıların toplamı

$$\frac{n.(n+1)}{2} = \frac{5.(5+1)}{2} = \frac{30}{2} = 15 \text{ bulunur.}$$

14. Örnek

Konunun girişinde sözünü ettiğimiz insan kulesi problemini çözelim.

Şekil 1.1.11



Çözüm

En üst katında 1 kişi olan ve her bir alt kata inildiğinde insan sayısı 1 artan 9 katlı kulenin her bir katındaki kişi sayısı üstten alta doğru sırasıyla; 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ve 9 dur.

Bu durumda kulenin inşa edilebilmesi için bu kişi sayılarının toplamını bulmalıyız. O hâlde gerekli olan kişi sayısı,

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9=\frac{9.(9+1)}{2}=\frac{90}{2}=45 \text{ bulunur.}$$

15. Örnek



Kan, insan kaynaklı olup başka alternatifi bulunmayan hayati bir tedavi aracıdır. Ülkemizde her 4 saniyede bir 1 üniteye kana ihtiyaç duyulmaktadır. 3 kişinin hayatını kurtarmaya yardımcı olabilen bir bağışçı, yardımlaşmanın verdiği huzurun yanında yenilenen kan hücreleriyle de kendi vücuduna katkı sağlamaktadır.

Bir alışveriş merkezinin bahçesinde bir haftalık süreyle düzenlenen kan bağışı kampanyasına ilk gün 14 ünite kan bağışlanmıştır. Her geçen gün bir öncekine göre 6 ünite fazla kan bağışı alınan bu kampanyada bağışlanan kanların toplamda kaç ünite olduğunu bulalım.

Çözüm

Şekil 1.1.12

Gün	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
Kan Miktarı (Ünite)	14	20	26	32	38	44	50

Günlere göre bağışlanan kan miktarı "Şekil 1.1.12" de verilen tablodaki gibidir.

Tabloda gösterilen bağışlanan kan miktarları 7 terimli bir sayı örüntüsü oluşturmaktadır. Örüntünün ortanca terimi, $\frac{14+50}{2}=32$ dir.

O hâlde bu örüntüdeki terimlerin (bağışlanan kan miktarlarının) toplamı,

Terim Sayısı . Ortanca Terim = 7 . 32 = 224 ünite olarak bulunur.

16. Örnek

Her yıl sadece 1. sınıflara kayıt alma kuralı bulunan, 12 yıl eğitim veren yeni açılmış bir özel okulun ilk yılında okula 18 öğrenci kayıt yaptırmıştır. Her yıl 1. sınıflara kayıt yaptıran öğrenci sayısının 4 arttığını düşünürsek okulun 23. yılının sonunda okuldan mezun olan toplam öğrenci sayısını bulalım.

Şekil 1.1.13



Çözüm

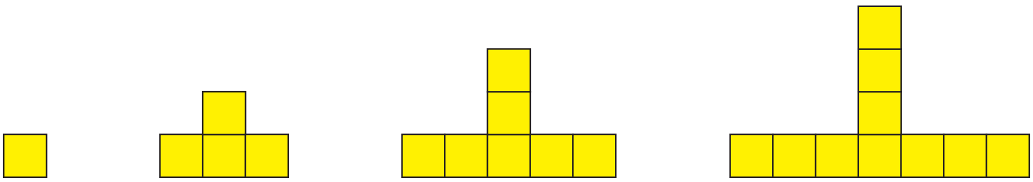
Okulun 1. sınıfına 12 yıl boyunca (her yılın başında) kayıt yaptıran öğrenci sayıları; 18, 22, 26, 30, 34, 38, 42, 46, 50, 54, 58, 62 dir. Her öğrenci okula kayıt yaptırdığı andan itibaren 12. yılın sonunda okuldan mezun olacağına göre, okul 12. yılın sonunda 18 kişilik ilk mezunlarını verecektir. O hâlde ilk 12 yıl içinde kayıt olmuş tüm öğrenciler 23. yılın sonunda okuldan mezun olmuş olacaktır. Bu durumda öğrenci sayısını veren 12 terimli sayı örüntüsünün toplamı 23. yılın sonunda okuldan mezun olan tüm öğrencilerin sayısına eşit olacaktır. Buna göre okuldan mezun olan öğrenci sayısı,

$$\text{Terim Sayısı . Ortanca Terim} = 12 \cdot \frac{18+62}{2}$$
$$= 12 \cdot 40$$
$$= 480 \text{ bulunur.}$$

3. Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. $A = 1 + 3 + 5 + 7 + ... + 25$ ve $B = 2 + 4 + 6 + 8 + ... + 24$ olduğuna göre $A + B$ kaçtır?

2. *Şekil 1.1.14*



"Şekil 1.1.14" te karelerle oluşturulan şekil örüntüsünün ilk dört adımı verilmiştir. Buna göre örüntü 10 adım devam ettirilirse toplamda kaç kare kullanılır?

3. $A = 5 + 10 + 15 + ... + 50$ ve $B = 1 + 2 + 3 + ... + 10$ olduğuna göre, A sayısı B nin kaç katıdır?

4. Başlangıçta kumbarasında 10 TL olan Deniz her gün kumbarasına 4 TL atmaktadır. Buna göre kaçıncı günün sonunda Deniz'in kumbarasında biriken para 50 TL olur?

1.1 KONU SONU DEĞERLENDİRME SORULARI

1. Aşağıdaki ifadelerden doğru olanların başına (D), yanlış olanların başına (Y) yazınız.

a. ☐ Her tam sayı, aynı zamanda bir doğal sayıdır.

b. ☐ Her doğal sayı, aynı zamanda bir tam sayıdır.

c. ☐ Her irrasyonel sayı, aynı zamanda bir gerçek sayıdır.

d. ☐ İki tam sayı arasında mutlaka bir rasyonel sayı bulunur.

e. ☐ Devirli ondalık açılımların hepsi rasyonel sayıdır.

f. ☐ Her irrasyonel sayı devirli ondalık açılım şeklinde yazılabilir.

2. $0,\ 3\sqrt{5},\ \sqrt{16},\ \sqrt{-4}$ ve $-1,\overline{1}$ sayılarının hangi sayı kümelerine ait olduklarını belirleyiniz.

3. Uzun kenar uzunluğu $2\sqrt{2}$ cm olan bir dikdörtgenin köşegen uzunluğunun cm türünden bir tam sayı olduğu bilinmektedir.

Buna göre dikdörtgenin kısa kenar uzunluğu tam sayı olarak en az kaç cm dir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

4. Aşağıdaki sayı kümelerinin birleşimlerinden hangisinin sonucunda gerçek sayılar kümesi oluşur?

A) $\mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^-$ B) $\mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}'$ C) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}^-$

D) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$ E) $\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q}$

5. $x^2 + 1 = 0$ denkleminin köklerini bularak bu köklerin hangi sayı kümesinin elemanı olduğunu belirtiniz.

6. Taban uzunlukları (a) ve yükseklikleri (h_a) verilen aşağıdaki üçgenlerden hangilerinin alanlarını cm^2 türünden ifade eden sayıların bir tam sayı olduğunu bulunuz.

a. $a = \sqrt{2}$ cm ve $h_a = 3\sqrt{2}$ cm

b. $a = (\sqrt{3} - 1)$ cm ve $h_a = (\sqrt{3} + 1)$ cm

c. $a = 9$ cm ve $h_a = 2,\overline{4}$ cm

d. $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ cm ve $h_a = 3\sqrt{2}$ cm

7. İki basamaklı bir sayının rakamları yer değiştirdiğinde sayının değeri 54 artıyor.

Buna göre ilk sayı en çok kaçtır?

A) 17 B) 28 C) 39 D) 71 E) 82

8. 66066 sayısı 22 nin kaç katıdır?

A) 101 B) 303 C) 1001

D) 3003 E) 30003

9. ab ve ba iki basamaklı sayılar olmak üzere,

$\dfrac{ab + ba}{ab - ba} = \dfrac{55}{36}$ ifadesini sağlayan ba sayısını bulunuz.

10. 1 den 20 ye kadar (20 dâhil) olan doğal sayıların toplamı, 21 den 40 a kadar (40 dâhil) olan doğal sayıların toplamından kaç eksiktir?

A) 210 B) 400 C) 530 D) 610 E) 820

11. 1 den 30 a kadar (30 dâhil) olan çift doğal sayıların toplamı, 1 den 30 a kadar olan tek doğal sayıların toplamından kaç fazladır?

A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

Hazır mısınız?

Bölüm 1.2 için Hazırlık Soruları

1. Aşağıdaki sayılardan kaç tanesi 3 ile tam bölünür?

I. 13 **II.** 42 **III.** 71 **IV.** 102

2. Aşağıdaki sayılar 5 ile bölünebilen dört basamaklı sayılardır. Buna göre boş kutulara yazılabilecek en büyük rakamları yazınız.

I. 2☐35 **II.** 930☐ **III.** 31☐0

3. Aşağıdaki sayılardan kaç tanesi 4 ile bölündüğünde 2 kalanını verir?

I. 10 **II.** 25 **III.** 37 **IV.** 62

4. Üç basamaklı, 6 ile bölünüp 5 ile bölünemeyen sayılardan en küçük dört tanesini yazınız.

5. Aşağıda verilen sayılardan 2, 3 ve 5 ile aynı anda bölünenleri belirleyiniz.

- 2360
- 2435
- 1050
- 720
- 596
- 3750

6. Aşağıda verilen sayıların katlarından istediğiniz dört tanesini yazınız.

12 → ….., ….., ….., …..

40 → ….., ….., ….., …..

7. Aşağıda verilen sayıları bölen tüm doğal sayıları yazınız.

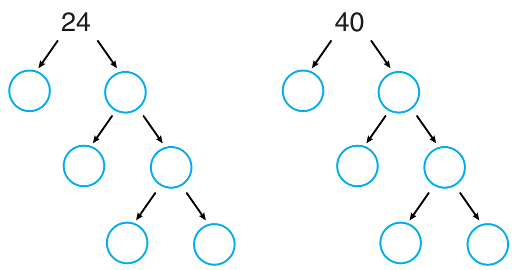
12 → ……………………………………………………

20 → ……………………………………………………

36 → ……………………………………………………

75 → ……………………………………………………

8. Aşağıda verilen sayıların çarpan ağaçlarını oluşturunuz.



9. Aşağıdaki asal çarpan algoritmalarında verilmeyen sayıları bulunuz.

A	2
18	2
9	B
C	3
1	

70	M
35	5
N	P
1	

BÖLÜNEBİLME

Bölünebilme Kuralları

Neleri Öğreneceğiz?

- Tam sayılarda bölünebilme kurallarıyla ilgili işlemler yapabilmeyi,
- Bir tam sayının pozitif tam sayı bölenlerinin sayısını bulabilmeyi.

Günlük Hayat Bağlantısı

Kredi kartları günümüzde paraya alternatif olan popüler bir ödeme aracıdır. İlk olarak ülkemizde 1968 yılında kullanılmaya başlayan kredi kartı sayısı o yıllarda birkaç bin iken Bankalararası Kart Merkezi'ne göre 2018 sonu itibariyle yaklaşık 66 milyon civarındadır. Türkiye'de kredi kartının bu derece yoğun kullanılmasının nedeni ise mal ya da hizmetleri taksitle satın alma imkânı sağlamasıdır.

Şekil 1.2.1



1440 TL değerindeki oyun konsolunu kredi kartına taksitle alacak olan Ali taksitlerin küsuratlı olmasını istememektedir. Bu durumda Ali, oyun konsolunu alırken en çok 9 olacak şekilde seçmesi gereken taksit sayısını bölünebilme kurallarını kullanarak belirleyebilir.

(Kaynak: http://www.bkm.com.tr/pos-atm-kart-sayilari/)

Birler basamağındaki rakamının sayı değeri çift (0, 2, 4, 6, 8) olan tam sayılar 2 ile bölünebilir.

Tek tam sayıların 2 ile bölümünden kalan 1 dir.

---

1. Örnek

2 ile bölünemeyen, rakamları farklı 5 basamaklı a689b sayısı için a + b nın en büyük değerini bulalım.

Çözüm

Sayı 2 ile bölünemiyorsa tektir. Rakamlarının da farklı olacağı göz önünde bulundurulursa, b nin en büyük değerinin 7 olacağı görülür. Bu durumda a rakamı da en çok 5 olabilir.

O hâlde, a + b nın en büyük değeri, 5 + 7 = **12** bulunur.

UYARI

a ve b doğal sayılar olmak üzere a sayısının b sayısı ile bölünebilmesi için bölme işleminde kalanın 0 (sıfır) olması gerekir.

Rakamlarının sayı değerleri toplamı 3 ün katı olan tam sayılar 3 ile bölünebilir.

Bir sayının 3 ile bölümünden kalan ise rakamlarının sayı değerleri toplamının 3 ile bölümünden kalana eşittir.

2. Örnek

48124 sayısının 3 ile bölünüp bölünemediğini inceleyip bölünemiyorsa 3 ile bölümünden kalanı bulalım.

Çözüm

48124 sayısının rakamlarının sayı değerlerinin toplamı,

$4 + 8 + 1 + 2 + 4 = 19$ dur. 19 sayısı, 3 ün katı değildir. Bu durumda, 48124 sayısı 3 ile bölünemez.

Sayının 3 ile bölümünden kalan, rakamların toplamı olan 19 un 3 ile bölümünden kalana eşittir. Buna göre $19 = 3 . 6 + 1$ olduğundan kalan 1 dir.

3. Örnek

Dört basamaklı 51a2 sayısının 3 ile bölünebilmesi için a rakamının alması gereken değerleri bulalım.

Çözüm

Rakamlar toplamı $5 + 1 + a + 2 = 8 + a$ dır. 51a2 sayısının 3 ile bölünebilmesi için, $8 + a$ sayısının 3 ün katı olması gerekir. Bu durumda a nın alabileceği değerler 1, 4 ve 7 olur.

4. Örnek

Beş basamaklı 31a69 sayısının 3 ile bölümünden kalanın 2 olması için a rakamının en az kaç olması gerektiğini bulalım.

Çözüm

Rakamlar toplamı, $3 + 1 + a + 6 + 9 = 19 + a$ dır. 31a69 sayısının 3 ile bölümünden kalanın 2 olması için, $19 + a$ sayısının 20, 23 ya da 26 ya eşit olması gerekir. a değerinin en az olması için $19 + a = 20$ olmalıdır.

Buna göre $19 + a = 20$ ise $a = 1$ bulunur.

Bir tam sayının onlar ve birler basamağındaki rakamların ikisi de sıfırsa veya sayının son iki basamağını oluşturan sayı 4 ile bölünebiliyorsa bu sayı 4 ile bölünebilir.

5. Örnek

Aşağıda verilen sayıların 4 ile bölünüp bölünemediğini inceleyelim.

Çözüm

a. $3200 = \underbrace{3200}_{4\text{ün katı}}$ → 4 ile bölünür.

b. $4708 = \underbrace{4700}_{4\text{ün katı}} + \underbrace{08}_{4\text{ün katı}}$ → 4 ile bölünür.

c. $6966 = \underbrace{6900}_{4\text{ün katı}} + \underbrace{66}_{4\text{ün katı değil}}$ → 4 ile bölünemez. (2 kalanını verir.)

d. $7591 = \underbrace{7500}_{4\text{ün katı}} + \underbrace{91}_{4\text{ün katı değil}}$ → 4 ile bölünemez. (3 kalanını verir.)

UYARI

Bir sayının 4 ile bölümünden kalanı bulurken, sayının son iki basamağının oluşturduğu sayının göz önüne alınmasının kolaylık sağladığına dikkat ediniz.

6. Örnek

Dört basamaklı 2a3b sayısı 3 ve 4 ile bölünebilmektedir.

Buna göre, a nın alabileceği değerlerin toplamını bulalım.

Çözüm

2a3b sayısının 4 ile bölünebilmesi için son iki basamağındaki 3b sayısının 4 ile bölünmesi gerekir. Bu durumda, b nin alabileceği değerler; 2 ve 6 olur.

O hâlde 2a3b dört basamaklı sayıları, 2a32 ve 2a36 olabilir.

2a32 sayısının 3 ile bölünebilmesi için, rakamları toplamı olan $2 + a + 3 + 2 = 7 + a$ nın 3 ün katı olması gerekir.

O hâlde, a nın alabileceği değerler; 2, 5 ve 8 ... (**I**) olur.

2a36 sayısının 3 ile bölünebilmesi için, rakamları toplamı olan $2 + a + 3 + 6 = 11 + a$ nın 3 ün katı olması gerekir.

O hâlde, a nın alacağı değerler; 1, 4 ve 7 ... (**II**) olur.

I ve **II** den a nın alacağı değerler toplamı, $2 + 5 + 8 + 1 + 4 + 7 = 27$ bulunur.

Birler basamağındaki rakamı 0 veya 5 olan tam sayılar, 5 ile bölünebilir.

7. Örnek

Aşağıda verilen sayıların 5 ile bölünüp bölünemediğini inceleyelim.

Çözüm

a. 1270 = $\underbrace{1270}_{5 \text{ in katı}}$ → 5 ile bölünür.

b. 405 = $\underbrace{405}_{5 \text{ in katı}}$ → 5 ile bölünür.

c. 9732 = $\underbrace{9730}_{5 \text{ in katı}} + \underbrace{2}_{5 \text{ in katı değil}}$ → 5 ile bölünemez. (2 kalanını verir.)

d. 12678 = $\underbrace{12670}_{5 \text{ in katı}} + \underbrace{8}_{5 \text{ in katı değil}}$ → 5 ile bölünemez. (3 kalanını verir.)

UYARI

Bir sayının 5 ile bölümünden kalanı bulurken, sayının son basamağının göz önüne alınmasının kolaylık sağladığına dikkat ediniz.

8. Örnek

37a4b beş basamaklı sayısının 2 ve 5 ile bölümünden kalanlar eşit ve 1 dir.

Buna göre, (a + b) nın en küçük değerini bulalım.

Çözüm

37a4b sayısının 5 ile bölümünden kalan 1 ise son basamağı 1 ya da 6 dır. Sayının 2 ile bölümünden kalan 1 ise sayı tek olmalıdır.

Bu durumda, b = 1 dir.

(a + b) nın en küçük olması için de a = 0 seçilmesi uygun olur.

O hâlde, (a + b) nın en küçük değeri 0 + 1 = 1 dir.

Bir tam sayının birler, onlar ve yüzler basamağındaki rakamların üçü de sıfırsa veya sayının son üç basamağını oluşturan sayı 8 ile bölünebiliyorsa verilen sayı 8 ile bölünebilir.

---

9. Örnek

Altı basamaklı, rakamları farklı 1358a2 doğal sayısı 8 ile bölünebilmektedir. Buna göre a sayısının alabileceği değerleri bulalım.

Çözüm

1358a2 sayısı 8 ile tam bölünüyorsa son üç basamağından oluşan 8a2 sayısı da 8 ile tam bölünür.

8a2 sayısını çözümlersek 8a2 = 800 + 10 . a + 2 bulunur.

800 sayısı 8 e tam bölündüğünden 10a + 2 sayısına bakmak yeterli olur.

a yerine 3 konulursa 32 bulunup 8 ile tam bölünür.

7 konulursa 72 bulunup 8 ile tam bölünür.

3 ve 7 rakamlarından, sayının rakamları farklı olması gerektiğinden a sayısı sadece 7 değerini alabilir.

Rakamlarının sayı değerleri toplamı 9 un katı olan tam sayılar 9 ile bölünebilir.

Bir sayının 9 ile bölümünden kalan ise rakamlarının sayı değerleri toplamının 9 ile bölümünden kalana eşittir.

10. Örnek

378024 sayısının 9 ile bölünüp bölünemediğini inceleyip bölünemiyorsa 9 ile bölümünden kalanı bulalım.

Çözüm

378024 sayısının rakamlarının sayı değerlerinin toplamı,

$3 + 7 + 8 + 0 + 2 + 4 = 24$ tür. 24 sayısı, 9 un katı değildir. Bu durumda, 378024 sayısı 9 ile bölünemez.

Sayının 9 ile bölümünden kalan, rakamların toplamı olan 24 ün 9 ile bölümünden kalana eşittir.

Buna göre $24 = 2 . 9 + 6$ olduğundan kalan 6 dır.

11. Örnek

1355a sayısının 9 ile bölümünden elde edilen kalan 5 tir.

Buna göre, a nın farklı değerleri için sayının 5 ile bölümünden elde edilecek kalanları bulalım.

Çözüm

1355a sayısının 9 ile bölümünden elde edilen kalan 5 ise sayının rakamlarının toplamının da 9 ile bölümünden elde edilecek kalanın 5 olması gerekir. O hâlde,

$$1 + 3 + 5 + 5 + a = 9k + 5 \; (k \in \mathbb{Z})$$
$$14 + a = 9k + 5$$
$$9 + a = 9k \text{ olur.}$$

Bu eşitliği sağlayan a değerleri 0 ya da 9 olabilir.

$a = 0$ için, 13550 nin 5 ile bölümünden elde edilen kalan 0,

$a = 9$ için, 13559 un 5 ile bölümünden elde edilen kalan 4 tür.

Bir tam sayının birler basamağındaki rakam o sayının 10 ile bölümünden elde edilen kalana eşittir. Eğer birler basamağındaki rakam 0 (sıfır) ise sayı 10 ile tam bölünür.

12. Örnek

Beş basamaklı 352ab doğal sayısının 10 ile bölümünden elde edilen kalan 4 tür. Bu sayı 8 ile bölünebilen bir sayı olduğuna göre a + b nın en büyük değerini bulalım.

Çözüm

Sayının birler basamağındaki rakam 10 ile bölümünden kalana eşittir. O hâlde b = 4 tür.

352a4 sayısı 8 ile bölünüyorsa 2a4 üç basamaklı sayısı da 8 ile tam bölünür.

2a4 sayısını çözümlersek $2a4 = 200 + 10 . a + 4$ bulunur.

200 sayısı 8 ile bölündüğünden $10a + 4$ sayısına bakmak yeterli olur.

Bu durumda a; 2 ya da 6 dan biri olabilir.

a + b nın en büyük değeri sorulduğundan a = 6 alınır.

O hâlde $a + b = 6 + 4 = 10$ bulunur.

Verilen bir tam sayının basamaklarındaki rakamların sayı değerleri, sağdan sola doğru birer basamak atlanarak toplanır.

Bu toplamdan, geriye kalan basamaklardaki rakamların sayı değerleri toplamı çıkarılır. Fark, 0 (sıfır) veya 11 in katı ise bu sayı 11 ile tam bölünür.

13. Örnek

4213 sayısının 11 ile bölündüğünde elde edilecek kalanı bulalım.

Çözüm

4[2]1[3] sayısında işaretlediğimiz rakamların sayı değerlerinin toplamından, geriye kalan rakamların sayı değerlerinin toplamını çıkaralım:

$(3 + 2) - (1 + 4) = 5 - 5 = 0$ olur.

O hâlde, 4213 sayısının 11 ile bölümünden elde edilen kalan 0 dır. Başka bir deyişle 4213 sayısı 11 ile tam bölünür.

14. Örnek

1a432b sayısının 11 ile bölünebilmesi için a + b nın alabileceği değerleri bulalım.

Çözüm

1 a 4 3 2 b sayısında,

$(b+3+a)-(2+4+1)=11k,\ (k\in\mathbb{Z})$ olmalıdır.

$a+b-4=11k$

$a+b=11k+4$ olur.

Buna göre, $k=0$ için $a+b=4$ ve $k=1$ için $a+b=15$ olur.

k ye, 0 ve 1 den başka tam sayı değerleri veremeyiz.

Çünkü $k=2$ için $a+b=25$ olur ki iki rakamın toplamı hiçbir zaman 25 etmez.

O hâlde, a + b nın alabileceği değerler 4 ve 15 tir.

15. Örnek

957281 sayısının 11 ile bölündüğünde elde edilecek kalanı bulalım.

Çözüm

9 5 7 2 8 1 sayısında,

$(5+2+1)-(9+7+8)=-16$ bulunur.

Bulunan fark negatif bir tam sayı olduğundan kalanı bulmak için farkın üzerine 11 in katlarını ekleyebiliriz.

Farka 11 in iki katını eklersek, $-16+22=6$ bulunur.

O hâlde, 957281 sayısının 11 ile bölümünden kalan 6 dır.

$x=a\cdot b$ ve a ile b aralarında asal sayılar olmak üzere, bir tam sayının x ile bölünebilmesi için hem a ya hem de b ye bölünmesi gerekir.

Bir sayının;

- *6 ile bölünebilmesi için hem 2 hem de 3 ile bölünmesi,*
- *12 ile bölünebilmesi için hem 3 hem de 4 ile bölünmesi,*
- *15 ile bölünebilmesi için hem 3 hem de 5 ile bölünmesi,*
- *18 ile bölünebilmesi için hem 2 hem de 9 ile bölünmesi gerekir.*

---

16. Örnek

1234a beş basamaklı sayısının 6 ile bölünebilmesi için a nın alabileceği değerleri bulalım.

Çözüm

Bir sayının 6 ile bölünebilmesi için 2 ve 3 ile bölünebilmesi gerekir.

1234a nın 3 ile bölünebilmesi için $1 + 2 + 3 + 4 + a = 10 + a$ nın 3 ün katı olması gerekir.

O hâlde a rakamı; 2, 5 veya 8 olmalıdır.

1234a sayısının 2 ile de bölünebilmesi (çift olması) gerektiğine göre a rakamının, 2 veya 8 olabileceği bulunur.

17. Örnek

Dört basamaklı 4a1b sayısının 6 ile bölünebilmesi için a nın alabileceği değerlerin kümesini bulalım.

Çözüm

4a1b sayısının 6 ile bölünebilmesi için sayının 2 ve 3 ile bölünebilmesi gerekir. Sayının 2 ile bölünebilmesi için, b rakamı 0, 2, 4, 6 veya 8 olmalıdır.

Sayının 3 ile bölünebilmesi için rakamları toplamı 3 ün katı olmalıdır. Bu durumda,

- $b = 0$ için 4a10 sayısı 3 ile tam bölünüyorsa,
  $4 + a + 1 + 0 = 3k$, $k \in \mathbb{Z}$
  $5 + a = 3k$
  $a = 1$, $a = 4$ veya $a = 7$ olabilir.

- $b = 2$ için 4a12 sayısı 3 ile tam bölünüyorsa,
  $4 + a + 1 + 2 = 3k$, $k \in \mathbb{Z}$
  $7 + a = 3k$
  $a = 2$, $a = 5$ veya $a = 8$ olabilir.

- $b = 4$ için 4a14 sayısı 3 ile tam bölünüyorsa,
  $4 + a + 1 + 4 = 3k$, $k \in \mathbb{Z}$
  $9 + a = 3k$
  $a = 0$, $a = 3$, $a = 6$ veya $a = 9$ olabilir.

- Bu basamağa kadar bulunan a rakamları tüm rakamlar kümesini oluşturduğundan $b = 6$ ve $b = 8$ için çözüm yapmaya gerek kalmamıştır.

O hâlde a nın alabileceği değerlerin kümesi $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ olur.

Bunları Biliyor musunuz?

2520 sayısının 1 den 10 a kadar (10 dâhil) bütün sayılarla tam bölünen en küçük sayı olduğunu biliyor muydunuz?

18. Örnek

Dört basamaklı 5a2b sayısının 12 ile bölünebilmesi için a nın alabileceği değerlerin kümesini bulalım.

Çözüm

12 = 3 . 4 olup 3 ve 4 aralarında asaldır.

Buna göre 5a2b sayısının 12 ile bölünebilmesi için sayının 3 ve 4 ile bölünebilmesi gerekir.

Sayının 4 ile bölünebilmesi için son iki basamağındaki sayının 20, 24 veya 28 olması gerekir. O hâlde b = 0, b = 4 veya b = 8 olmalıdır.

Bu durumda,

- b = 0 için 5a20 sayısı 3 ile tam bölünüyorsa,
  $5 + a + 2 + 0 = 3k$, $k \in \mathbb{Z}$
  $7 + a = 3k$
  a = 2 , a = 5 veya a = 8 olabilir.

- b = 4 için 5a24 sayısı 3 ile tam bölünüyorsa,
  $5 + a + 2 + 4 = 3k$, $k \in \mathbb{Z}$
  $11 + a = 3k$
  a = 1 , a = 4 veya a = 7 olabilir.

- b = 8 için 5a28 sayısı 3 ile tam bölünüyorsa,
  $5 + a + 2 + 8 = 3k$, $k \in \mathbb{Z}$
  $15 + a = 3k$
  a = 0 , a = 3 , a = 6 veya a = 9 olabilir.

O hâlde a nın alabileceği değerlerin kümesi {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} olur.

19. Örnek

Beş basamaklı 41a3b sayısının 15 ile bölünebilen bir çift sayı olduğu biliniyorsa a nın alabileceği değerleri bulalım.

Çözüm

41a3b sayısının 15 ile bölünebilmesi için bu sayının 3 ve 5 ile bölünebilmesi gerekir.

Bu sayının 5 ile bölünebilmesi için b = 0 veya b = 5 olmalıdır.

Ancak sayı çift olduğundan b = 0 almalıyız.

41a30 sayısının 3 ile bölünebilmesi için rakamlarının sayı değerleri toplamı 3 ün katı olmalıdır.

$4 + 1 + a + 3 + 0 = 8 + a$ ise a nın alması gereken değerler 1, 4 ve 7 olmalıdır.

20. Örnek

52a7a beş basamaklı sayısının 18 ile bölümünden elde edilen kalan 1 dir.

Buna göre a nın değerini bulalım.

Çözüm

52a7a sayısının 18 ile bölümünden elde edilen kalan 1 ise sayının 2 ve 9 ile de bölümünden elde edilecek kalanlar 1 olmalıdır.

Sayının 2 ile bölümünden elde edilen kalan 1 ise a rakamı, 1, 3, 5, 7 ya da 9 dur.

Sayının 9 ile bölümünden elde edilen kalan 1 olacağından,

$5 + 2 + a + 7 + a = 9k + 1 \ (k \in \mathbb{Z})$

$14 + 2a = 9k + 1$

$13 + 2a = 9k$ olmalıdır.

$13 + 2a$ sayısı, $a = 1$ için, $13 + 2 = 15 \neq 9k$,

$a = 3$ için, $13 + 6 = 19 \neq 9k$,

$a = 5$ için, $13 + 10 = 23 \neq 9k$,

$a = 7$ için, $13 + 14 = 27 = 9k$,

$a = 9$ için, $13 + 18 = 31 \neq 9k$ dir. O hâlde $a = 7$ bulunur.

4. Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. Aşağıdaki sayıların 2, 3, 4, 5, 9 ve 11 sayılarından hangileri ile tam bölündüğünü bulunuz.

a. 41325 **b.** 12315 **c.** 61270 **d.** 23456 **e.** 666666 **f.** $\underbrace{444...4}_{10 \text{ tane}}$

2. Aşağıdaki sayıların 3, 5 ve 9 ile bölünmesinden elde edilen kalanları bulunuz.

a. 4121 **b.** 5738 **c.** 532143 **d.** 3009 **e.** 4040404 **f.** $\underbrace{222...2}_{40 \text{ tane}}$

3. 18a26 beş basamaklı sayısının 11 ile bölünebilmesi için a kaç olmalıdır?

4. 2a3b dört basamaklı sayısının 10 ile bölünmesinden bulunan kalan 4 tür. Bu sayı, 3 ile bölünebildiğine göre a nın alabileceği değerler toplamını bulunuz.

5. "Şekil 1.2.2" de ilk satırdaki sayılar, ilk sütundaki sayılara kalansız bölünebiliyorsa ilgili satır ile sütunun kesiştiği yeri örneklerde olduğu gibi çarpı işareti (X) ile işaretleyiniz.

Şekil 1.2.2

	75	80	156	237	256	1020	1326	1340	1755	2223	7368	46 440	57 825
2						X							
3			X										
4		X											
5													
6													
9													
11													

Bir Tam Sayının Asal Çarpanları ve Pozitif Tam Sayı Bölenlerinin Sayısı

Günlük Hayat Bağlantısı

Asal sayılar, matematikte ve elektronik hesaplamalarda çok sık kullanılır. Örneğin İnternet üzerinden aktarılan bilgilerin şifrelenmesi, sadece iki tane asal sayı ile bölünebilen çok büyük sayılarla yapılır. Alıcı, paketlerin hangi asal sayılar kullanılarak üretildiğini bilmiyorsa şifreyi çözmek hemen hemen imkânsızdır. Bu nedenle, bankalar, askeri sistemler gibi bilgilerin güvenli olarak tutulması ve iletişimin gizli yapılması gereken her alanda asal sayılar kullanılmaktadır.

Şekil 1.2.3



Kendisinden ve 1 den başka pozitif tam sayı böleni olmayan 1 den büyük tam sayılara asal sayılar denir.

- *1, asal sayı değildir.*
- *2 en küçük asal sayıdır. 2 dışındaki tüm asal sayılar tek sayılardır.*

21. Örnek

Çarpanlarına ayrılmış olarak verilen aşağıdaki tam sayıları inceleyerek bunlardan asal sayı olanları belirleyelim.

2 = 1 . 2	9 = 1 . 9 = 3 . 3
3 = 1 . 3	10 = 1 . 10 = 2 . 5
5 = 1 . 5	11 = 1 . 11
7 = 1 . 7	13 = 1 . 13

Çözüm

2, 3, 5, 7, 11, ... sayılarının 1 ve kendilerinden başka pozitif tam sayı bölenleri yoktur. O hâlde bu sayılar asal sayılardır. Asal sayılar kümesi A = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...} olarak ifade edilirse 2 dışında tüm asal sayıların tek sayı olduğu görülür.

Tarih Kutusu

Eratosthenes
(İratistins)



(MÖ 276 – MÖ 194)
(Temsilî resimdir.)

Antik Yunanlı bir matematikçi olan Eratosthenes, asal sayıların bulunmasında kullanılan gayet kullanışlı bir yöntem olan Eratosten kalburu yöntemini geliştirmiştir.

Kaynak: Katz Victor J., A History of Mathematics: An Introduction, Harper Collins College Publishers, New York, 1993.

x, y, z pozitif tam sayılar ve a, b, c asal sayılar olmak üzere pozitif A tam sayısını, $A = a^x . b^y . c^z$ şeklinde ifade etmeye A sayısını asal çarpanlarına ayırma; a, b ve c sayılarının herbirine de A sayısının asal çarpanları denir.

22. Örnek

150 sayısını asal çarpanlarına ayıralım.

Çözüm

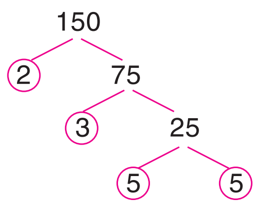
I. Yol

150	2
75	3
25	5
5	5
1	

150 sayısının asal çarpanları cinsinden ifadesi,

$150 = 2 . 3 . 5 . 5 = 2 . 3 . 5^2$ olup asal çarpanları; 2, 3 ve 5 tir.

II. Yol



Çarpan ağacı yöntemiyle 150 sayısının asal çarpanları yandaki gibi 2, 3 ve 5 bulunur.

Bir A pozitif tam sayısının asal çarpanlarına ayrılmış hâli, $A = a^x . b^y . c^z$ olsun. Bu durumda A sayısının pozitif tam sayı bölenlerinin sayısı $(x + 1).(y + 1).(z + 1)$ ile bulunur.

23. Örnek

144 sayısının pozitif tam sayı bölenlerinin sayısını bulalım.

Çözüm

144 sayısını, $144 = 12.12 = 2^2.3.2^2.3 = 2^4 . 3^2$ şeklinde asal çarpanlarına ayırabiliriz. Burada asal çarpanların üslerini birer arttırıp çarparsak 144 ün pozitif tam sayı bölenlerinin sayısını

$(4 + 1) . (2 + 1) = 15$ olarak buluruz.

24. Örnek

120 sayısının asal olmayan pozitif tam sayı bölenlerinin sayısını bulalım.

Çözüm

120 sayısını, $120 = 12.10 = 2^2.3.2.5 = 2^3.3.5$ şeklinde asal çarpanlarına ayırabiliriz.

Burada üsleri birer arttırıp çarparsak 120 nin pozitif tam sayı bölenlerinin sayısını $(3 + 1) . (1 + 1) . (1 + 1) = 16$ olarak buluruz. Ancak asal çarpanlarına ayırma işleminden de görüldüğü üzere 2, 3 ve 5 asal olan çarpanlar (bölenler) olup 3 tanedir.

Bu nedenle tüm pozitif tam sayı bölenlerinin sayısından asal olanların sayısını çıkarırsak aradığımız asal olmayan pozitif tam sayı bölenlerinin sayısı $16 - 3 = 13$ bulunur.

25. Örnek

Bir A pozitif tam sayısının asal çarpanlarına ayrılmış hâli $A = 3^x . 5^y$ dir. A sayısının pozitif tam sayı bölenlerinin sayısı 15 olduğuna göre $x + y$ nın kaç olduğunu bulalım.

Çözüm

Asal çarpanlarına ayrılmış bir doğal sayının pozitif tam sayı bölenlerinin sayısı (PBS) hesaplanırken, üslerin birer fazlası bulunur ve bu sayılar çarpılır. Bu durumda,

$A = 3^x . 5^y \Rightarrow PBS = (x + 1) . (y + 1) \Rightarrow 15 = (x + 1) . (y + 1)$ dir.

15 in çarpanları, 1 ile 15 ya da 3 ile 5 tir.

$(x + 1)$ ya da $(y + 1)$ den birisi 1 olduğunda x ya da y den birisi 0 olacak ve bu durum asal çarpanların tanımıyla çelişeceği için çarpımları 15 olan sayılar 3 ile 5 seçilir.

O hâlde, $(x + 1) = 3 \Rightarrow x = 2$ ve $(y + 1) = 5 \Rightarrow y = 4$ tür.

UYARI

Burada $(x + 1) = 5$ ve $(y + 1) = 3$ seçilseydi de sonucun yine aynı olacağına dikkat ediniz.

Buna göre $x + y$ değeri $2 + 4 = 6$ bulunur.

26. Örnek

$A = 11^2 + 22^2 + 33^2$ sayısının pozitif tam sayı bölenlerinin sayısını bulalım.

Çözüm

A sayısının asal çarpanlarına ayrılmış şekli,

$$A = 11^2 + 22^2 + 33^2 = 11^2 + (2.11)^2 + (3.11)^2 = 11^2 + 2^2.11^2 + 3^2.11^2 = 11^2(1 + 4 + 9)$$
$$= 11^2.14$$
$$= 11^2.2^1.7^1 \text{ olur.}$$

O hâlde A sayısının pozitif tam sayı bölenlerinin sayısı,

$PBS = (2 + 1) . (1 + 1) . (1 + 1) = 3 . 2 . 2 = 12$ bulunur.

27. Örnek

$A = 36 . 10^n$ sayısının 105 tane pozitif tam sayı böleninin olduğu bilindiğine göre n sayısının kaç olduğunu bulalım.

Çözüm

A sayısının asal çarpanlarına ayrılmış şekli,

$A = 36 . 10^n = 4 . 9 . (2.5)^n = 2^2 . 3^2 . 2^n . 5^n = 2^{n+2} . 3^2 . 5^n$ dir.

Bu durumda A sayısının pozitif tam sayı bölenlerinin sayısı,

$PBS = (n + 2 + 1) . (2 + 1) . (n + 1) \Rightarrow 105 = (n + 3) . 3 . (n + 1)$

$\Rightarrow 35 = (n + 3) . (n + 1)$

olup aralarında 2 fark bulunan ve çarpımları 35 olan iki doğal sayı 7 ve 5 tir.

Bu durumda $n + 3 = 7 \Rightarrow n = 4$ bulunur.

UYARI

$35 = (n+3).(n+1)$ denklemini $n^2 + 4n - 32 = 0$ şekline getirdikten sonra da çarpanlarına ayırıp $(x+8).(x-4) = 0$ denkleminde $x = -8$ ve $x = 4$ köklerini bulabilirdik.

28. Örnek

360 sayısının pozitif tam sayı bölenlerinin kaç tanesinin iki basamaklı olduğunu bulalım.

Çözüm

360 sayısını asal çarpanlarına ayırıp pozitif tam sayı bölenlerinin sayısını bulalım.

$360 = 36 . 10 = 6 . 6 . 2 . 5 = 2 . 3 . 2 . 3 . 2 . 5 = 2^3 . 3^2 . 5$ ve buradan

$PBS = (3 + 1) . (2 + 1) . (1 + 1) = 4 . 3 . 2 = 24$ bulunur.

Bu 24 tane pozitif bölenden 8 tanesi (1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 ve 9) bir basamaklı, 3 tanesi de (120, 180 ve 360) üç basamaklı olduğundan bu 11 tane pozitif bölen 24 ten çıkarılırsa 360 ın iki basamaklı pozitif tam sayı bölenlerinin sayısı bulunur. O hâlde 360 ın iki basamaklı pozitif tam sayı bölenlerinin sayısı $24 - 11 = 13$ bulunur.

29. Örnek

Günlük Hayat Bağlantısı

Kumbarasında 54 TL parası bulunan Kerem her gün kumbarasına 6 TL para atmaktadır.

Buna göre en az kaç gün sonra TL cinsinden kumbarada biriken parayı ifade eden sayının bir tam sayının küpü olacağını bulalım.

Şekil 1.2.4



Çözüm

Kumbarada bulunan 54 TL para ile her gün atılan 6 TL nin oluşturduğu birikim, k gün olmak üzere $(54 + 6k)$ TL dir.

$54 + 6k = 6.(9 + k) = 2.3.(9 + k)$ sayısının en küçük tam küp sayı olan $2^3.3^3$ olması için $(9 + k)$ nın en küçük değerinin $2^2.3^2$ olması gerekir.

O hâlde gün sayısı $9 + k = 2^2 . 3^2$

$k = 36 - 9$

$k = 27$ bulunur.

30. Örnek

1440 sayısının pozitif tam sayı bölenlerinden kaçının çift, kaçının tek ve kaçının 5 ile tam bölündüğünü bulalım.

Çözüm

Önce 1440 sayısını asal çarpanlarına ayırıp pozitif tam sayı bölenlerinin sayısını bulalım.

$1440 = 12 . 12 . 10 = 3 . 4 . 3 . 4 . 2 . 5 = 3 . 2^2 . 3 . 2^2 . 2 . 5 = 2^5 . 3^2 . 5$ olup
PBS = $(5 + 1) . (2 + 1) . (1 + 1) = 6 . 3 . 2 = 36$ bulunur.

Çift olan pozitif tam sayı bölenlerinin her birinde 2 çarpanı bulunacağından $2^5.3^2.5$ ifadesini $2.(2^4.3^2.5)$ şeklinde yazalım. Bu durumda $2^4 . 3^2 . 5$ sayısının her bir pozitif tam sayı böleni 2 ile çarpılacak ve çift pozitif tam sayı böleni elde edilecektir. $2^4 . 3^2 . 5$ sayısının pozitif tam sayı bölen sayısı (1440 ın çift pozitif tam sayı bölen sayısı) PBS = $(4 + 1) . (2 + 1) . (1 + 1) = 5 . 3 . 2 = 30$ bulunur.

Tüm pozitif tam sayı bölenlerinin sayısından, çift pozitif tam sayı bölenlerinin sayısını çıkarırsak 1440 ın tek olan pozitif tam sayı bölenlerinin sayısını buluruz. Bu durumda 1440 ın tek olan pozitif tam sayı bölenlerinin sayısı $36 - 30 = 6$ bulunur.

Şimdi de çift pozitif tam sayı bölenlerinin sayısını bulurken kullandığımız yöntemi kullanarak 5 ile tam bölünen pozitif tam sayı bölenlerin sayısını bulalım. 5 in katı olan pozitif tam sayı bölenlerinin her birinde 5 çarpanı bulunacağından $2^5 . 3^2.5$ ifadesini $5 . (2^5 . 3^2)$ şeklinde yazalım. Bu durumda $2^5 . 3^2$ sayısının her bir pozitif tam sayı böleni 5 ile çarpılacak ve 5 in katı olan tam sayı böleni elde edilecektir. O hâlde, $2^5 . 3^2$ sayısının pozitif tam sayı bölen sayısı (1440 ın 5 in katı olan pozitif tam sayı bölen sayısı),
PBS = $(5 + 1) . (2 + 1) = 6 . 3 = 18$ bulunur.

31. Örnek

x ve y pozitif tam sayılar olmak üzere $90 . x = y^2$ eşitliğini sağlayan en küçük x sayısının kaç olduğunu bulalım.

Çözüm

$90 . x = y^2$ eşitliğindeki x sayısı, 90 ile çarpıldığında sonucu tam kare yapacak en küçük tam sayı anlamını taşımaktadır.

90 sayısını, $90 = 3^2 . 2 . 5$ şeklinde asal çarpanlarına ayırabiliriz. $90 . x = y^2 \Rightarrow 3^2 . 2 . 5 . x = y^2$ olur.

Bu eşitlikte, kuvveti çift olmayan asal çarpanlar dikkate alındığında x en küçük $x = 2 . 5$ olup y de tam sayı olur.

O hâlde x in en küçük tam sayı değeri 10 bulunur.

32. Örnek

10! sayısını asal çarpanlarına ayıralım.

Çözüm

$10! = 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10 = 1.2.3.2^2.5.2.3.7.2^3.3^2.2.5 = 2^8 . 3^4 . 5^2 . 7$ olur.

Ancak bu yöntem sonuca uzun bir şekilde ulaşmamızı sağlayacaktır. Bu çözümü ikinci bir yolla aşağıdaki şekilde de yapabiliriz.

Bir faktöriyelin asal çarpanlarını bulurken faktöriyeli ifade eden sayı ardışık olarak o asal sayıya bölünür ve bölümler toplanır. O hâlde 10! sayısının asal çarpanlarını ve bu sayıların kuvvetlerini bulalım.

$10 \div 2 = (5)$, $5 \div 2 = (2)$, $2 \div 2 = (1)$	$10 \div 3 = (3)$, $3 \div 3 = (1)$	$10 \div 5 = (2)$	$10 \div 7 = (1)$

10! sayısında; $5 + 2 + 1 = 8$ olduğundan 2^8 çarpanı, $3 + 1 = 4$ olduğundan 3^4 çarpanı, 5^2 çarpanı ve 7 çarpanı bulunur.

O hâlde 10! sayısı $10! = 2^8 . 3^4 . 5^2 . 7$ şeklinde asal çarpanlarına ayrılır.

33. Örnek

$\dfrac{36!}{2^n}$ ifadesinin bir doğal sayı olduğu bilinmektedir. Buna göre n sayısının alabileceği doğal sayı değerlerinin toplamını bulalım.

Çözüm

$\dfrac{36!}{2^n}$ ifadesi bir doğal sayı ise n sayısı en çok 36! in asal çarpanlarına ayrılmış hâlinde 2 çarpanının kuvvetine eşit olacaktır. Bu durumda n sayısı

$36 \div 2 = (18)$, $18 \div 2 = (9)$, $9 \div 2 = (4)$, $4 \div 2 = (2)$, $2 \div 2 = (1)$

$18 + 9 + 4 + 2 + 1 = 34$ bulunur.

> **UYARI**
>
> $1 + 2 + 3 + ... + n$ ardışık doğal sayılarının toplamı, $\dfrac{n.(n+1)}{2}$ ile hesaplanır.

n sayısının 34 ve 34 ten küçük tüm doğal sayı değerleri için $\dfrac{36!}{2^n}$ ifadesi bir doğal sayı olacaktır. Bu durumda n nin alabileceği değerler toplamı, $1 + 2 + 3 + ... + 33 + 34 = \dfrac{34.35}{2} = 595$ bulunur.

5. Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. Bütün asal sayıların pozitif tam sayı bölen sayısının kaça eşit olduğunu açıklayınız.

2. İki basamaklı asal sayıların kaç tane olduğunu bulunuz.

3. Aşağıdaki sayıları asal çarpanlarına ayırıp asal çarpanlarının kaçar tane olduğunu bulunuz.

a. 66 **b.** 90 **c.** 196 **d.** 420

4. Aşağıdaki sayıların her birinin kaçar tane pozitif tam sayı böleninin olduğunu bulunuz.

a. 56 **b.** 84 **c.** 324 **d.** 1560

5. 180 sayısının asal olmayan pozitif tam sayı bölenlerinin sayısını bulunuz.

6. Bir A doğal sayısının asal çarpanlarına ayrılmış hâli $A = 2^x . 3^y$ dir. A sayısının pozitif tam sayı bölenlerinin sayısı 35 olduğuna göre $x + y$ nın kaç olduğunu bulunuz.

7. $A = 33^2 + 55^2$ sayısının pozitif tam sayı bölenlerinin sayısını bulunuz.

8. $A = 50 . 10^n$ sayısının 20 tane pozitif tam sayı böleninin olduğu bilinmektedir. Buna göre n sayısının kaç olduğunu bulunuz.

9. Kumbarasında 72 TL parası bulunan Ali her gün kumbarasına 4 TL para atmaktadır. Buna göre en az kaç gün sonra TL türünden kumbarada biriken parayı ifade eden sayı bir tam sayının küpü olur?

10. 600 sayısının pozitif tam sayı bölenlerinden kaçının,

a. Tek sayı olduğunu bulunuz.

b. 3 ile tam bölündüğünü bulunuz.

11. x ve y pozitif tam sayılar olmak üzere $30 . x = y^2$ eşitliğini sağlayan en küçük x sayısı kaçtır?

12. $\dfrac{63!}{2^n}$ ifadesinin bir doğal sayı olduğu bilindiğine göre n sayısının alabileceği en büyük doğal sayı değeri kaçtır?

1. Aşağıdaki sayıların 2, 3, 4, 5, 9 ve 11 sayılarından hangileri ile bölündüğünü bulunuz.

a. 1234 **b.** 8765 **c.** 1062

d. 12321 **e.** 300003 **f.** $\underbrace{444...4}_{12 \text{ tane}}$

2. Aşağıdaki sayıların 3, 5 ve 9 ile bölünmesinden elde edilen kalanları bulunuz.

a. 429 **b.** 783 **c.** 6065

d. 23432 **e.** 3003 **f.** $\underbrace{777...7}_{9 \text{ tane}}$

3. Aşağıdaki ifadelerden doğru olanların başına (D), yanlış olanların başına (Y) yazınız.

a. ☐ 603a4 beş basamaklı sayısının 3 ile bölünebilmesi için a üç farklı değer alabilir.

b. ☐ Beş basamaklı 13a26 sayısının 11 ile bölünebilmesi için a = 9 olmalıdır.

c. ☐ 519ab beş basamaklı sayısının 20 ile bölünebilmesi için a nın alabileceği değerler toplamı 20 bulunur.

d. ☐ İki doğal sayının çarpımı 9 ile bölünüyorsa bu doğal sayılar ayrı ayrı 3 ile bölünür.

4. 29a37 beş basamaklı sayısının 11 ile bölünebilmesi için a kaç olmalıdır?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 6 E) 7

5. 3a4b dört basamaklı sayısının 10 ile bölünmesinden bulunan kalan 4 tür.

Bu sayı 3 ile bölünebildiğine göre, a nın alabileceği değerler toplamını bulunuz.

6. 3a2b dört basamaklı sayısının 5 ile bölünmesinden bulunan kalan 4 tür.

Bu sayı, 6 ile bölünebildiğine göre a nın alabileceği kaç farklı değer vardır?

7. Aşağıdaki ifadelerden doğru olanların başına (D), yanlış olanların başına (Y) yazınız.

a. ☐ Yalnız bir tane asal çarpanı olan sayılar kesinlikle asal sayıdır.

b. ☐ Asal çarpanlarından biri 2 olan sayıların tek sayı olan tam sayı bölenleri yoktur.

c. ☐ x in pozitif tam sayı çarpanları a ve b olsun. Buna göre x sayısı a ya bölünüp b ye bölünmeyebilir.

d. ☐ Tüm tek sayılar asaldır.

e. ☐ Çift sayılardan yalnız bir tanesi asaldır.

8. Aşağıdaki sayıları asal çarpanlarına ayırıp asal çarpanlarının kaçar tane olduğunu bulunuz.

a. 88 **b.** 96 **c.** 180 **d.** 640

9. Aşağıdakilerden hangisinin pozitif tam sayı bölen sayısı diğerlerinden fazladır?

A) 30 B) 37 C) 42 D) 54 E) 60

10. $A = 37^2 . 111^3$ sayısının pozitif tam sayı bölenlerinin sayısı kaçtır?

A) 6 B) 9 C) 12 D) 15 E) 24

11. 10^n sayısının 25 tane pozitif tam sayı böleni varsa n kaçtır?

12. 40.x sayısı bir tam sayının karesi ise x in alabileceği en küçük pozitif tam sayı değeri kaçtır?

1. **I.** 0 **II.** 2,9 **III.** $0,\overline{18}$

IV. $\frac{11}{13}$ **V.** $\sqrt{90}$

Yukarıdaki ifadelerden kaç tanesi rasyonel sayıdır?

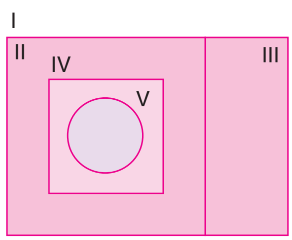
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

2. **Aşağıdakilerden hangisi $\sqrt{2}$ ile çarpıldığında sonuç irrasyonel bir sayı olur?**

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{16}$ C) $\frac{5}{\sqrt{2}}$

D) $\sqrt{32}$ E) $\frac{\sqrt{8}}{7}$

3.



Sayı kümelerinin birbiriyle olan ilişkisi yukarıdaki şekilde verilmiştir.

Buna göre rasyonel sayılar kümesini kaç numaralı bölge ifade eder?

A) I B) II C) III D) IV E) V

4. **$\sqrt{3} - 2$ sayısı aşağıdakilerden hangisiyle çarpılırsa sonuç bir tam sayı olur?**

A) 2 B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{6}$

D) 3,2 E) $\sqrt{3} + 2$

5. **Aşağıdakilerden hangisinde çarpılan iki irrasyonel sayının sonucu bir rasyonel sayı olur?**

A) $\sqrt{3}\,.\,\sqrt{6}$ B) $\sqrt{4}\,.\,\sqrt{9}$ C) $3\sqrt{2}\,.\,2\sqrt{3}$

D) $\sqrt{12}\,.\,5\sqrt{3}$ E) $\sqrt{5}\,.\,\sqrt{15}$

6. $a = \sqrt{6}$ ve $b = \sqrt{3}$ olmak üzere

aşağıdakilerden hangisinin sonucu rasyonel bir sayıdır?

A) $\sqrt{3}\,.\,a\,.\,b$ B) $a^2\,.\,b$ C) $a\,.\,b^2$

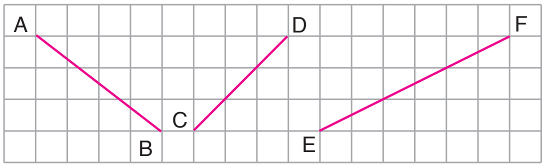
D) $\frac{a}{b}$ E) $\sqrt{2}\,.\,a\,.\,b$

7. **$\sqrt{180}$ sayısı aşağıdakilerden hangisiyle çarpılırsa sonuç bir rasyonel sayı olur?**

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{5}$

D) $\sqrt{6}$ E) $\sqrt{7}$

8.



Yukarıdaki birim kareli zeminde verilen doğru parçalarından hangilerinin uzunluğunu ifade eden sayı rasyonel sayıdır?

A) Yalnız [AB] B) Yalnız [EF]
C) [AB] ve [CD] D) [CD] ve [EF]
E) [AB], [CD] ve [EF]

9. **I.** $\sqrt{\frac{1}{4}}$ **II.** $\sqrt{2,5}$ **III.** $\sqrt{1,44}$ **IV.** $\sqrt{40}$

Yukarıdaki ifadelerden hangileri rasyonel sayıdır?

A) Yalnız I B) Yalnız III C) I ve IV
D) I ve III E) II ve IV

10. **a00bc sayısının çözümlenmiş biçimi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $a \cdot 10^3 + 10b + c$ B) $a \cdot 10^4 + 100 \cdot b + c$
C) $a \cdot 10^4 + 10 \cdot b + c$ D) $a \cdot 10^5 + 10 \cdot b + c$
E) $a \cdot 10^4 + b + c$

11. $X \cdot 10^5 + Y \cdot 10^3 + Z \cdot 10$

ifadesi, aşağıdaki sayılardan hangisinin çözümlenmiş biçimidir?

A) X0Y0Z B) X00Y0Z C) X0Y0Z0
D) X00Y00Z E) X0Y00Z

12. ab iki basamaklı sayısı, rakamları toplamının 7 katıdır.

Bu koşula uyan kaç tane iki basamaklı doğal sayı vardır?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

13. a – b = 2 olduğuna göre, aa, ab, ba, bb iki basamaklı doğal sayılarının toplamı **en fazla kaçtır?**

A) 352 B) 380 C) 422 D) 447 E) 540

14. a ve b birer rakam olmak üzere, aa, ab, bb, ba iki basamaklı sayıları için ab – bb = 30 olduğuna göre, **aa + ba nın en küçük değeri kaçtır?**

A) 32 B) 48 C) 58 D) 62 E) 66

15. A ve B birer rakam olmak üzere, AB + BA = 143 olduğuna göre, **A + B kaçtır?**

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

16. Rakamları toplamı 11 olan üç basamaklı xxy sayısının birler ve yüzler basamağı yer değiştirildiğinde sayı 99 küçülüyorsa **x.y kaçtır?**

A) 6 B) 12 C) 20 D) 30 E) 42

17. İki basamaklı bir sayının rakamları yer değiştirdiğinde sayı 63 büyüyor.

Bu sayının birler basamağındaki rakam ile onlar basamağındaki rakam arasındaki fark kaçtır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

18. ABB ve BAA üç basamaklı doğal sayılarının toplamı dört basamaklı bir doğal sayıdır. Buna göre, **bu toplamın en küçük değeri kaçtır?**

A) 1100 B) 1024 C) 1083 D) 1110 E) 1221

19. 7a5b ve 4b6a dört basamaklı sayıları veriliyor. a = b + 2 olduğuna göre, **7a5b – 4b6a işleminin sonucu kaçtır?**

A) 3188 B) 3088 C) 2798 D) 2688 E) 2198

20. **1 den 30 a kadar (30 dâhil) olan doğal sayıların toplamı, 31 den 40 a kadar (40 dâhil) olan doğal sayıların toplamından kaç fazladır?**

A) 10 B) 110 C) 355 D) 465 E) 820

21. **1 den 100 e kadar (100 dâhil) olan çift doğal sayıların toplamı, 1 den 100 e kadar olan tek doğal sayıların toplamından kaç fazladır?**

A) 1 B) 10 C) 20 D) 50 E) 100

22. **İlk gün 400 m koşup koştuğu günlük mesafeyi her gün 100 metre arttıran Ali Kerem 10 gün sonunda toplamda kaç km koşmuş olur?**

A) 7 B) 7,5 C) 8 D) 8,5 E) 9

Bilge'nin tasarruf yapmak amacıyla yeni aldığı kumbarasına attığı para miktarlarıyla ilgili aşağıdaki bilgiler verilmiştir.

- Kumbaraya ilk gün 10 TL atılmıştır.
- Bundan sonraki her gün kumbaraya bir önceki gün atılandan 5 TL fazla para atılacaktır.

Bu bilgilere göre 23, 24 ve 25. soruları cevaplayınız.

23. Bilge'nin kumbarasında bir hafta sonunda kaç TL birikir?

A) 170 B) 175 C) 180 D) 185 E) 190

24. Bilge her gün 5 TL arttırmaya devam edecek şekilde kumbaraya ilk gün 20 TL atmış olsaydı kumbarasında bir hafta sonunda kaç TL birikirdi?

A) 225 B) 235 C) 245 D) 255 E) 265

25. Bilge'nin kumbaraya attığı parayı her gün 10 TL arttıracak olduğunu düşününüz. Bu durumda 10 günün sonunda kumbarasında 850 TL birikmiş olan Bilge ilk gün kumbaraya kaç TL para atmıştır?

A) 25 B) 30 C) 35 D) 40 E) 45

Bir sınıftaki 20 öğrenciye bir miktar cevizin tamamı öğretmenleri tarafından şu şekilde dağıtılmaktadır.

- İlk öğrenciye 3 ceviz verilecektir.
- Sonraki her öğrenci bir öncekinden 1 fazla ceviz alacaktır.

Bu bilgilere göre 26 ve 27. soruları cevaplayınız.

26. Dağıtılan ceviz sayısı kaçtır?

A) 250 B) 260 C) 270 D) 280 E) 290

27. Öğretmen ilk öğrenciye 2 ceviz verseydi sonuçta kaç ceviz artardı?

A) 1 B) 10 C) 12 D) 20 E) 30

28.
- ▽A → Asal olmayan pozitif A tam sayısının asal çarpanlarının toplamını ifade eder.

Örnek: ▽18 için,

$18 = 2 . 3^2$ → ▽18 = 2 + 3 = 5 tir.

- [B] → B pozitif tam sayısının asal çarpanlarına ayrıldığında bulunan kuvvetlerin birer fazlasının toplamlarını ifade eder.

Örnek: [52] için,

$52 = 2^2 . 13^1$ → [52] = 3 + 2 = 5 tir.

Yukarıdaki bilgilere göre [▽1800] işleminin sonucu kaçtır?

A) 2 B) 4 C) 5 D) 7 E) 10

2. ALT ÖĞRENME ALANI

ÜÇGENLER









Bölümler

2.1 Dik Üçgen

Matematikte kökeni eski Mısır'a kadar dayanan ancak 18. yüzyılda Euler (Öyler)'in çalışmalarından sonra günümüzdeki hâline ulaşan trigonometri eski Yunan'da "üçgen" ve "ölçmek" anlamına gelen kelimelerden türetilmiştir. Günlük hayatımızda mimariden sağlığa, ekonomiden elektrik ve haberleşmeye kadar bir çok yerde trigonometri kullanılmaktadır.

Üçgenlerde benzerlik, dik üçgenlerde hesaplamalar ve dik üçgenlerde trigonometrik hesaplamaları bu ünitede ele alacağız.

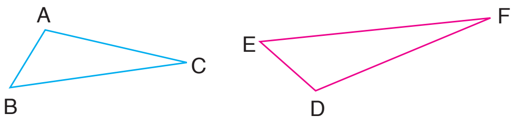
Hazır mısınız?

Bölüm 2.1 için Hazırlık Soruları

1. Aşağıda kenar uzunlukları verilen üçgenlerden hangileri dik üçgendir?

I. a = 1 cm	b = $2\sqrt{3}$ cm	c = 3 cm
II. a = $\sqrt{2}$ cm	b = $\sqrt{2}$ cm	c = 2 cm
III. a = 9 cm	b = 12 cm	c = 15 cm
IV. a = 0,3 cm	b = 0,4 cm	c = 0,5 cm

2.



Şekilde $\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$ olduğuna göre, aşağıdakilerden hangilerinin doğru olduğunu bulunuz.

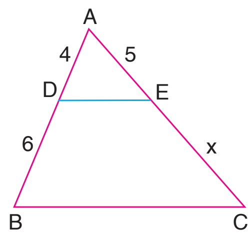
I. $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} = \frac{|BC|}{|EF|}$

II. $m(\widehat{A}) = m(\widehat{D})$
$m(\widehat{B}) = m(\widehat{E})$
$m(\widehat{C}) = m(\widehat{F})$

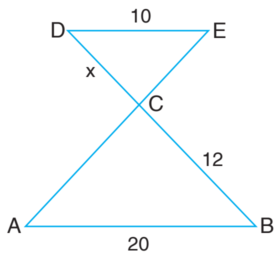
III. $\frac{\text{Çevre}(\widehat{ABC})}{\text{Çevre}(\widehat{DEF})} = \frac{|AB|}{|DE|}$

IV. $\frac{\text{Alan}(\widehat{ABC})}{\text{Alan}(\widehat{DEF})} = \frac{|AB|}{|DE|}$

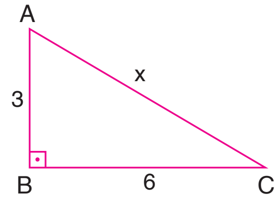
3. ABC üçgeninde
[DE] // [BC]
|AD| = 4 cm
|AE| = 5 cm ve
|BD| = 6 cm
olduğuna göre
|EC| = x kaç cm dir?



4. Şekilde [DE] // [AB]
[DB] ∪ [AE] = {C}
|DE| = 10 br
|AB| = 20 br ve
|BC| = 12 br
olduğuna göre
|DC| = x kaç br dir?



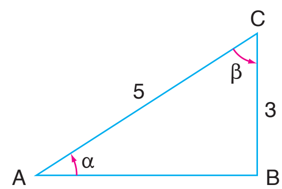
5. Şekildeki üçgende
$m(\widehat{ABC}) = 90°$
|AB| = 3 cm ve
|BC| = 6 cm dir.
Buna göre
|AC| = x kaç cm dir?



6. Aşağıda 30°, 45° ve 60° nin trigonometrik değerlerinin tablosu oluşturulacaktır. Buna göre boş kutuları uygun şekilde doldurunuz.

Açı / Trigonometrik Oran	30°	45°	60°
sin	....	....	....
....	....	....	$\frac{1}{2}$
tan	....	....	....
cot	$\sqrt{3}$	....	....

7. ABC üçgeninde
α + β = 90° dir.
Buna göre aşağıdaki boşlukları uygun şekilde doldurunuz.



I. $\cos\alpha = \sin\beta = \frac{.....}{.....}$

II. $.....\alpha = ...\beta = \frac{4}{3}$

III. $\cos .... = \sin\beta = \frac{.....}{.....}$

IV. $\tan .... = \cot .... = \frac{3}{4}$

8. Aşağıda verilen trigonometrik eşitliklere uygun olarak boşlukları doldurunuz.

a. ..... 10° = cos 80°

b. cot ...° = ... 57°

c. sin 4° = cos ...°

d. sin 45° = ...°

e. ..... 35° = sin ...°

f. ....° = cot 79°

BÖLÜM 2.1

DİK ÜÇGEN

Dik Üçgenlerle İlgili Problemler

Neleri Öğreneceğiz?

- Dik üçgenlerle ilgili problem çözebilmeyi,
- Dik üçgende trigonometrik oranlarla ilgili problem çözebilmeyi,
- Üçgenlerin benzerliğiyle ilgili problem çözebilmeyi.

Günlük Hayat Bağlantısı

Sisam (Samos) adasında dünyaya gelen Pisagor'un bu adada bir dik üçgen oluşturmaya çalıştığını gösteren heykeli bulunmaktadır. Otuz yaşlarına kadar bu adada yaşamış olan Pisagor, sonrasında Güney İtalya'ya geçip orada bir okul açmıştır. Buradaki çalışmalarıyla geometri alanındaki en ünlü teoremlerden biri olan Pisagor teoremini ispatlamıştır. Pisagor'un bu teoremini ispatlarken Mısırlılardan ve Mezopotamyalılardan öğrendiklerini kullandığı bilinmektedir.

(Kaynak: http://www.matematik.dpu.edu.tr/index/sayfa/3124/pisagor)

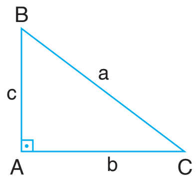
Şekil 2.1.1



Bir ABC üçgeninde $m(\widehat{A}) = 90°$ olması için gerek ve yeter koşul $a^2 = b^2 + c^2$ olmasıdır. Bu Pisagor teoremi olarak bilinir.

Yani $m(\widehat{A}) = 90° \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$ *ve* $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow m(\widehat{A}) = 90°$ *dir.*

Şekil 2.1.2



---

1. Örnek

Pisagor teoremini, dik üçgenin kenarlarına yapıştırılan karelerin alanlarını kullanarak ispatlayalım.

Çözüm

"Şekil 2.1.3"teki ABC üçgeninin kenarlarındaki karelerin kenar uzunlukları $|AC| = 3$ br, $|AB| = 4$ br ve $|BC| = 5$ br olup karelerin alanları $3^2 = 9$ br^2, $4^2 = 16$ br^2 ve $5^2 = 25$ br^2 dir.

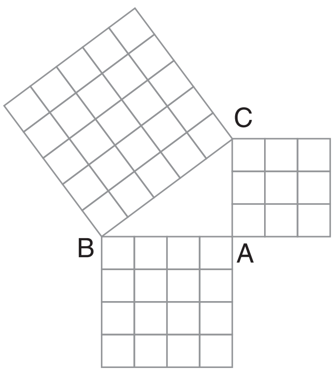
Hipotenüse yapışmış büyük karenin alanı, diğer iki karenin alanlarının toplamına eşittir. Buradan

$25 = 9 + 16$

$5^2 = 3^2 + 4^2$

$|BC|^2 = |AC|^2 + |AB|^2$ bulunur.

Şekil 2.1.3

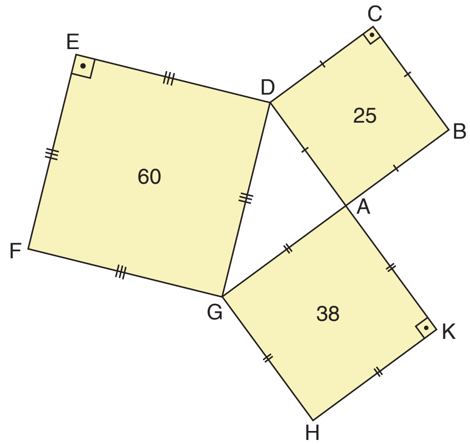


O hâlde bir ABC dik üçgeninde $m(\widehat{A}) = 90°$ olduğunda $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$ dir.

2. Örnek

Üç kareden oluşan "Şekil 2.1.4" te $A(ABCD) = 25\ cm^2$, $A(GHKA) = 38\ cm^2$ ve $A(DEFG) = 60\ cm^2$ dir. Buna göre karelerin kenarlarının oluşturduğu DAG üçgeninin bir dik üçgen olup olmadığını bulalım.

Şekil 2.1.4



Çözüm

"1. Örnek" ten, kenarları dik üçgenin kenarlarıyla çakıştırılan karelerden hipotenüs üzerindeki karenin alanının, iki dik kenar üzerindeki karelerin alanlarının toplamına eşit olduğunu biliyoruz.

"Şekil 2.1.4" te dik olduğunu düşündüğümüz kenarlardaki karelerin alanlarının toplamı,

$25 + 38 = 63\ br^2$

olup bu alan değeri büyük olan karenin alanına eşit değildir. O hâlde karelerin kenarlarıyla oluşturulmuş üçgen bir dik üçgen değildir.

3. Örnek

Günlük Hayat Bağlantısı

Bir okulun yıl sonu gösterisinde kullanılacak sahnenin üst yüzeyinin dikdörtgen şeklinde olması istenmektedir. "Şekil 2.1.5" teki sahnenin dörtgen şeklindeki iskeleti hazırlanıp ölçüm yapıldığında iskeletin kısa kenar uzunluğunun 12 m, uzun kenar uzunluğunun 16 m ve köşegen uzunluğunun da 20 m olduğu belirlenmiştir.

Buna göre sahnenin üst yüzeyinin bir dikdörtgen olup olmadığını bulalım.

Şekil 2.1.5



Çözüm

Sahnenin üst kısmını modelleyen ABCD dörtgeni "Şekil 2.1.6" da verilmiştir. ABCD bir dikdörtgen ise ABC bir dik üçgen olacak ve kenar uzunlukları arasında Pisagor teoremi sağlanacaktır. ABC üçgeninde,

$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$

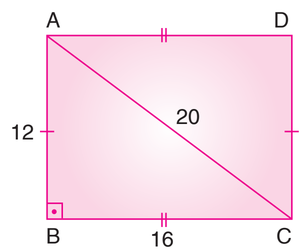
$20^2 = 12^2 + 16^2$

$400 = 144 + 256$

$400 = 400$ olup Pisagor teoremi sağlanır. Bu durumda $m(\widehat{B}) = 90°$ dir.

O hâlde sahnenin üst yüzeyi istenildiği gibi bir dikdörtgen olacaktır.

Şekil 2.1.6

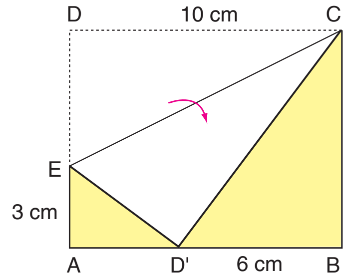


4. Örnek

Ön yüzü sarı, arka yüzü beyaz olan "Şekil 2.1.7" deki ABCD dikdörtgeni şeklindeki kâğıdın D köşesi [EC] boyunca katlanarak [AB] üzerindeki D' noktasına getiriliyor.

|AE| = 3 cm, |D'B| = 6 cm ve |CD| = 10 cm olduğuna göre dikdörtgenin kısa kenar uzunluğunun kaç cm olduğunu bulalım.

Şekil 2.1.7



Çözüm

|CD| = |AB| = 10 cm ve |AB| = |AD'| + |D'B| olduğundan

|AD'| = 10 – 6 = 4 cm dir.

"Şekil 2.1.8" deki EAD dik üçgeninde Pisagor teoremine göre,

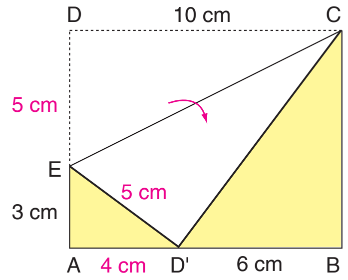
$|ED'|^2 = |AE|^2 + |AD'|^2$

$|ED'|^2 = 3^2 + 4^2$

$|ED'|^2 = 25$

$|ED'| = 5$ cm dir.

Şekil 2.1.8



Dikdörtgenin katlanan CDE dik üçgeni şeklindeki kısmı buna eş olan CD'E dik üçgenini oluşturmuştur. O hâlde $\widehat{CDE} \cong \widehat{CD'E}$ dir.

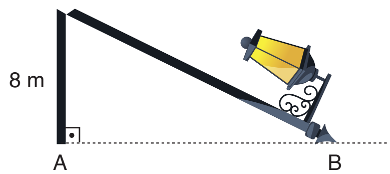
Buradan |ED'| = |ED| = 5 cm olup dikdörtgenin kısa kenar uzunluğu 3 + 5 = 8 cm olarak bulunur.

5. Örnek

Günlük Hayat Bağlantısı

25 metre uzunluğundaki sokak lambası "Şekil 2.1.9" daki gibi yerden 8 metre yükseklikten kırılmıştır. Buna göre direğin tepesinin yere değdiği B noktasının direğin dikme ayağına olan uzaklığının kaç m olduğunu bulalım.

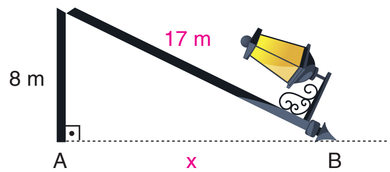
Şekil 2.1.9



Çözüm

25 metre uzunluğundaki direğin yerden 8 metre yükseklikten kırılması sonucunda direğin devrilen kısmının uzunluğu 25 – 8 = 17 metre olacaktır. "Şekil 2.1.10" da kırık direğin yer düzlemiyle oluşturduğu üçgen dik üçgendir. Bu üçgende Pisagor teoremi uygulanırsa,

Şekil 2.1.10



$$17^2 = 8^2 + x^2 \Rightarrow 289 = 64 + x^2$$
$$\Rightarrow x^2 = 289 - 64$$
$$\Rightarrow x^2 = 225$$
$$\Rightarrow x = 15 \text{ m bulunur.}$$

6. Örnek

Eski Mısır'da tarlaların alanlarının kolayca hesaplanması ve vergilerinin doğru bir şekilde ödenmesi için tarlalar dikdörtgen şeklinde düzenlenmekteydi. Nil Nehri'nin yakınlarında bulunan, "Şekil 2.1.11" deki fotoğrafta gösterilen bu verimli tarlaların sınırları her yıl taşan nehir yüzünden kaybolmaktaydı. Mısırlılar da sınırları kaybolan tarlalarının dik olan köşelerini belirlemek için, üzerinde eşit aralıklarla atılmış 12 tane düğümün bulunduğu iki ucu birleşik ipler kullanmaktaydı. Bu iplerle köşeleri düğümlerde olan dik üçgenlerin, dolayısıyla dik açıların nasıl oluşturulduğunu inceleyelim.

Şekil 2.1.11

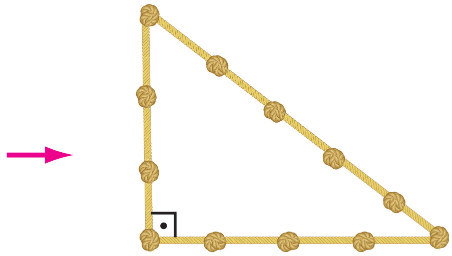


Çözüm

Şekil 2.1.12



Şekil 2.1.13



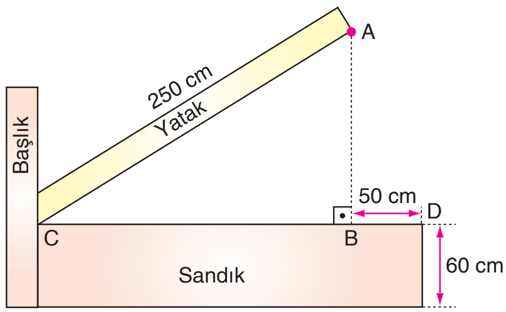
"Şekil 2.1.12"deki gibi üzerinde eşit aralıklarla 12 düğüm bulunan halka ipin uzunluğu 12 br olarak düşünülebilir. Bu halka iple bir dik açı ancak düğümleri üçgenin köşeleri olan bir dik üçgen oluşturulduğunda elde edilir. O hâlde dik üçgenin çevre uzunluğu da 12 br olacaktır. Bu koşulu sağlayan tek üçgen köşeleri düğümlere denk gelen "Şekil 2.1.13"teki 3−4−5 üçgenidir.

7. Örnek

Şekil 2.1.14



Şekil 2.1.15



Altlarındaki sandıklara kullanılmayan eşyaların saklanabilmesi nedeniyle "Şekil 2.1.14" teki fotoğrafta görülen, açılabilir sandıklı yataklar sıklıkla tercih edilmektedir. Yatağın açık hâlinin modellendiği "Şekil 2.1.15"teki yatağın boyu 250 cm ve sandığın yüksekliği 60 cm dir. "Şekil 2.1.15"te verilen, yatağın ucundaki A noktasının iz düşümü olan B noktasının sandığın ucundaki D noktasına olan uzaklığı 50 cm olduğuna göre A noktasının yerden yüksekliğinin kaç cm olduğunu bulalım.

Çözüm

"Şekil 2.1.15" te görülen yatak modelinde, $[AC]$ ile $[CD]$ eştir.

Bu durumda $|AC| = |CD| = 250$ cm dir.
$|CD| = |CB| + |BD|$ olduğundan,
$|CB| = 250 - 50 = 200$ cm olur.

ABC üçgeni bir dik üçgen olduğundan Pisagor teoremi uygulanırsa,

$$|AC|^2 = |BC|^2 + |AB|^2 \Rightarrow 250^2 = 200^2 + |AB|^2$$
$$\Rightarrow |AB|^2 = 62500 - 40000$$
$$\Rightarrow |AB|^2 = 22500$$
$$\Rightarrow |AB| = 150 \text{ cm dir.}$$

O hâlde A noktasının yerden yüksekliği, sandığın yüksekliğine 150 cm eklenerek $60 + 150 = 210$ cm bulunur.

Bunları Biliyor musunuz?



Pisagor ağacı matematikteki ünlü fraktallardan biridir. Fraktal oluşturulurken başlangıç karesi ile kenarları bir dik üçgen oluşturacak iki kare yerleştirilir. Bu adım daha sonra küçük kareler için defalarca tekrarlanırsa oluşan şekil bir ağaç görüntüsü alacağından ve her bir adımda kullanılan karelerin kenar uzunlukları arasında Pisagor teoremi sağlandığından fraktal, Pisagor fraktalı adını almıştır.

8. Örnek

"Şekil 2.1.16" da gösterilen eni 70 cm, boyu da 240 cm olan dikdörtgen şeklindeki kapıdan bir kenar uzunluğu 2,45 m olan karesel aynanın geçip geçemeyeceğini bulalım.

Şekil 2.1.16



Çözüm

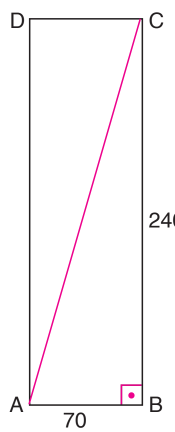
Kenar uzunluğu 2,45 m olan aynayı, boyu 2,4 m olan kapının uzun kenarlarına paralel bir şekilde geçiremeyiz. O hâlde kapının köşegen uzunluğunu bulup aynanın bir kenarından uzun olup olmadığına bakalım.

"Şekil 2.1.17" de kapının modellendiği dikdörtgen görülmektedir. Bu dikdörtgende kapının köşegenini hipotenüs kabul eden ABC dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa,

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 \Rightarrow |AC|^2 = 70^2 + 240^2$$
$$\Rightarrow |AC|^2 = 4900 + 57600$$
$$\Rightarrow |AC|^2 = 62500$$
$$\Rightarrow |AC| = 250 \text{ cm bulunur.}$$

Bu durumda kapının köşegen uzunluğunun aynanın bir kenar uzunluğundan daha büyük olduğunu bulmuş oluruz. O hâlde ayna kapıdan, kapının uzun kenarına paralel olmayacak bir şekilde eğik tutularak geçirilebilir.

Şekil 2.1.17

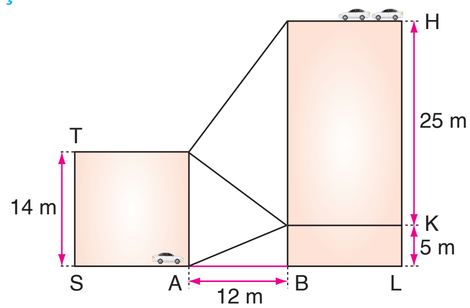


9. Örnek

"Şekil 2.1.18" deki modelde iki bloktan oluşan bir alışveriş merkezinin çatıdaki otoparkına çıkan rampalar gösterilmiştir.

|AB| = 12 m, |TS| = 14 m, |KL| = 5 m ve |HK| = 25 m olduğuna göre zemin kattan sağdaki bloğun çatısına çıkacak bir aracın alacağı yolun kaç m olduğunu bulalım.

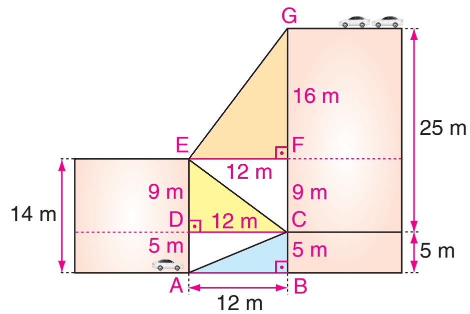
Şekil 2.1.18



Çözüm

"Şekil 2.1.19" da çizdiğimiz yer düzlemine paralel doğru parçalarıyla mavi ABC, sarı CDE ve turuncu EFG dik üçgenleri oluşturulmuştur. Bu üçgenlerin hipotenüs uzunlukları otoparka çıkan rampaların uzunluklarını verecektir. ABC dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa,

Şekil 2.1.19



$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 \Rightarrow |AC|^2 = 12^2 + 5^2$

$\Rightarrow |AC|^2 = 144 + 25$

$\Rightarrow |AC|^2 = 169$

$\Rightarrow |AC| = 13$ m bulunur.

CDE dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa,

$|CE|^2 = |DE|^2 + |DC|^2 \Rightarrow |CE|^2 = 9^2 + 12^2$

$\Rightarrow |CE|^2 = 81 + 144$

$\Rightarrow |CE|^2 = 225$

$\Rightarrow |CE| = 15$ m bulunur.

EFG dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa,

$|EG|^2 = |EF|^2 + |FG|^2 \Rightarrow |EG|^2 = 12^2 + 16^2$

$\Rightarrow |EG|^2 = 144 + 256$

$\Rightarrow |EG|^2 = 400$

$\Rightarrow |EG| = 20$ m bulunur.

O hâlde zemin kattaki aracın çatıdaki otoparka çıkarken alacağı yolun uzunluğu, $13 + 15 + 20 = 48$ m bulunur.

UYARI

Bazı özel dik üçgenlerde kenar uzunlukları Pisagor teoremi kullanılmadan da bulunabilir. Bu özel dik üçgenlerden en çok kullanılanları,

- 3 – 4 – 5 ve katları (6 – 8 – 10, 9 – 12 – 15 ... gibi.)
- 5 – 12 – 13 ve katları (10 – 24 – 26 ... gibi.)
- 7 – 24 – 25 ve katları
- 8 – 15 – 17 ve katlarıdır.

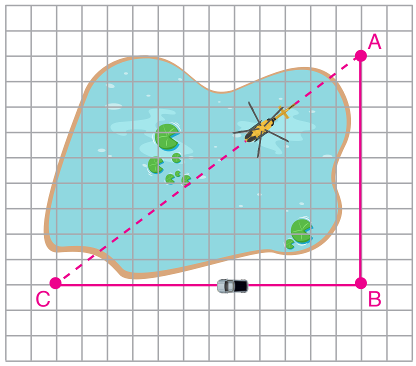
Bunlar gibi Pisagor teoremini sağlayan pozitif tam sayı üçlülerine Pisagor üçlüleri denir.

Bundan sonraki hesaplamalarımızda bu özel üçgenler için Pisagor teoremi kullanmayacağız.

10. Örnek

“Şekil 2.1.20” deki kareli zeminde verilen haritada A, B ve C şehirleri ile bu şehirler arasındaki doğrusal rotalar gösterilmiştir. A şehrinden doğrusal rotalar kullanarak önce B, sonra gölün diğer ucundaki C şehrine giden araç ve A şehrinden C şehrine giden bir helikopter gösterilmiştir. Haritadaki her birim karenin alanı gerçekte $0{,}64\ km^2$ olduğuna göre aracın aldığı yolun, helikopterin aldığı yoldan kaç km daha uzun olduğunu bulalım.

Şekil 2.1.20



Çözüm

“Şekil 2.2.20” de gösterilen ABC dik üçgeninde dik kenar uzunluklarını saydığımızda 9 birim ve 12 birim uzunluğunda olduğunu görürüz.

Şimdi her bir karenin kenar uzunluğunu bulalım. Alanı $0{,}64\ km^2$ olan karenin her bir kenar uzunluğu 0,8 km dir.

Bu durumda ABC üçgeninin dik kenarlarının gerçek uzunlukları
$|AB| = 9 . 0{,}8 = 7{,}2$ km ve $|BC| = 12 . 0{,}8 = 9{,}6$ km dir.

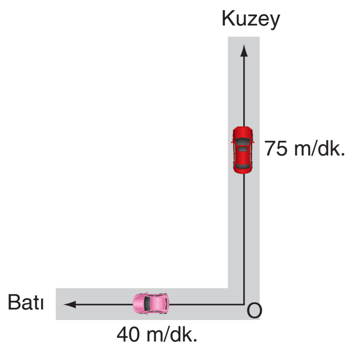
ABC üçgeninde Pisagor teoreminden,
$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 \Rightarrow |AC|^2 = 7{,}2^2 + 9{,}6^2 \Rightarrow |AC|^2 = 51{,}84 + 92{,}16 \Rightarrow |AC| = 12$ km dir.

O hâlde aracın aldığı yol $|AB| + |BC| = 7{,}2 + 9{,}6 = 16{,}8$ km olup helikopterin aldığı $|AC| = 12$ km lik yoldan $16{,}8 - 12 = 4{,}8$ km daha uzundur.

11. Örnek

“Şekil 2.1.21” deki O noktasından aynı anda harekete başlayan iki oyuncak arabadan biri kuzey yönünde 75 m/dk. hızla, diğeri batı yönünde 40 m/dk. hızla yol almaktadır. Buna göre arabaların sabit hızla ilerledikleri düşünülürse 4 dakika sonra aralarındaki uzaklığın kaç metre olacağını bulalım.

Şekil 2.1.21



Çözüm

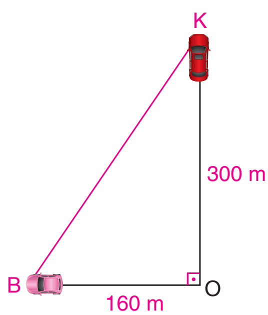
Araçların dörder dakika sonra aldıkları yollar, $4 . 40 = 160$ m ve $4 . 75 = 300$ m olur.

Araçların izlediği kuzey ve batı rotaları birbirine dik olduğundan araçlar arasındaki mesafeyi bulurken “Şekil 2.1.22” deki KOB dik üçgenini kullanabiliriz.

Bu dik üçgenin dik kenar uzunlukları $160 = 8 . 20$ ve $300 = 15 . 20$ olduğundan üçgenin hipotenüs uzunluğu $17 . 20 = 340$ metredir. (8 – 15 – 17 üçgeni)

O hâlde oyuncak arabaların hareketlerinden 4 dakika sonra arasındaki mesafe 340 metre bulunur.

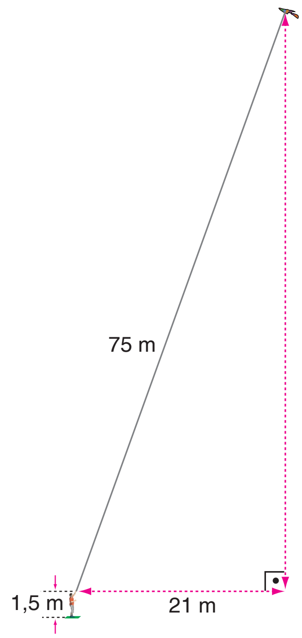
Şekil 2.1.22



12. Örnek

“Şekil 2.1.23” te Kerem’in 75 metrelik gergin ipinin ucunu yerden 1,5 metre yüksekte tuttuğu uçurtması gösterilmiştir. Uçurtmanın yer düzlemine dik iz düşüm doğrusunun Kerem’in el hizasından çizilen yatay doğruyla kesişim noktası arasında 21 metrelik mesafe olduğuna göre uçurtmanın yerden kaç metre yükseklikte uçtuğunu bulalım.

Şekil 2.1.23



Çözüm

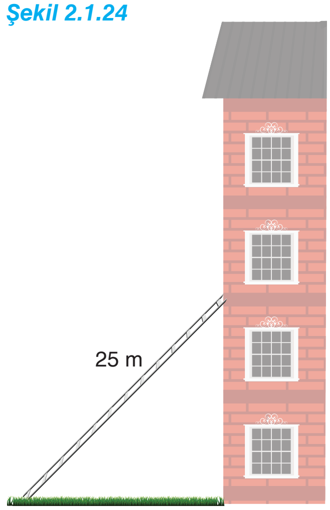
“Şekil 2.1.23” te de görülen dik üçgende kenar uzunluklarını ifade eden sayılar olan 75 ve 21 in ortak böleni 3 tür. Bu durumda $75 = 3.25$ ve $21 = 3.7$ yazılabilir. 7 ve 25 i kullanan özel dik üçgen 7 – 24 – 25 üçgeni olduğundan dik üçgenin bilinmeyen kenar uzunluğu $3.24 = 72$ metredir.

Bulduğumuz 72 m lik uzunluk uçurtmanın Kerem’in el hizasından yüksekliğini göstermektedir.

O hâlde uçurtmanın yerden yüksekliği $72 + 1{,}5 = 73{,}5$ metre bulunur.

13. Örnek

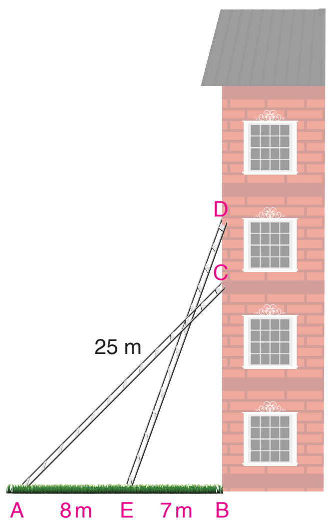
Şekil 2.1.24



“Şekil 2.1.24” te bir binaya 15 metre uzaktan dayanmış olan 25 metre uzunluğundaki merdiven gösterilmiştir. Merdivenin alt ucu binaya 8 metre yaklaştırıldığında merdivenin üst ucunun ilk duruma göre kaç metre yükseleceğini bulalım.

Çözüm

Şekil 2.1.25



“Şekil 2.1.25” te merdivenin ilk durumu ABC dik üçgeninin hipotenüsüyle, alt ucu binaya 8 metre yaklaştırıldıktan sonraki durumu da EBD dik üçgeninin hipotenüsüyle modellenmiştir.

ABC dik üçgeninde iki kenar uzunluğu olan 15 m ve 25 m nin ortak böleni 5 tir. Bu kenarları 3.5 ve 5.5 şeklinde ifade edersek bu üçgenin diğer dik kenar uzunluğu $4.5 = 20$ metredir. (3 – 4 – 5 üçgeni)

O hâlde $|BC| = 20$ metredir.

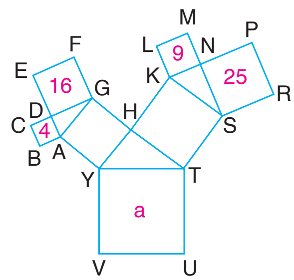
EBD dik üçgeninde iki kenar uzunluğu 7 m ve 25 m olduğundan bu üçgenin de 7 – 24 – 25 dik üçgeni olduğunu görebiliriz.

O hâlde $|BD| = 24$ metredir.

Buna göre merdivenin alt ucu binaya 8 metre yaklaştırıldığında üst ucunun ilk duruma göre 4 metre yükseleceği bulunur.

1. “Şekil 2.1.26”da, ADG, KNS ve HTY dik üçgen, ABCD, DEFG, AGHY, KLMN, NPRS, KSTH ve TUVY birer karedir. A(ABCD) = 4 br^2, A(DEFG) = 16 br^2, A(KLMN) = 9 br^2 ve A(NPRS) = 25 br^2 dir.

Buna göre A(TUVY) = a kaç br^2 dir?

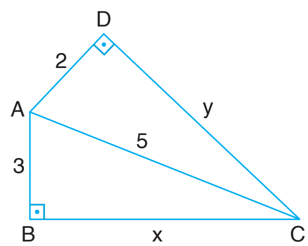


Şekil 2.1.26

2. Televizyon ekranlarının ve bilgisayar monitörlerinin ölçüleri cm türünden köşegen uzunluklarına göre belirlenir. Örnek olarak köşegen uzunluğu 120 cm olan bu televizyon 120 ekrandır. Buna göre kısa ve uzun kenar uzunlukları sırasıyla 96 cm ve 128 cm olan dikdörtgen şeklindeki bir televizyonun kaç ekran olduğunu bulunuz.

3. “Şekil 2.1.27”deki ABC ve ADC birer dik üçgendir.

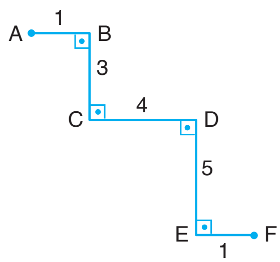
|AD| = 2 cm, |DC| = y cm, |AC| = 5 cm, |AB| = 3 cm ve |BC| = x cm olduğuna göre x + y nın kaç cm olduğunu bulunuz.



Şekil 2.1.27

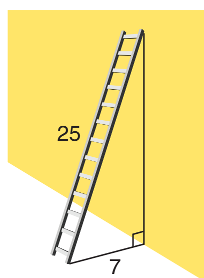
4. Üzerinde eşit aralıklarla atılmış 30 tane düğümün bulunduğu iki ucu birleşik ipinizin olduğunu düşününüz. Bu iple köşeleri düğümlerin üzerine denk gelen bir dik üçgeni nasıl oluşturabileceğinizi ve bu üçgenin kenar uzunluklarının kaçar birim olacağını açıklayınız.

5. “Şekil 2.1.28”de birbirine dik durumda bulunan doğru parçaları için |AB| = 1 cm, |BC| = 3 cm, |CD| = 4 cm, |DE| = 5 cm ve |EF| = 1 cm bilgileri verilmiştir. Buna göre A noktasında bulunan karınca, doğru parçalarının üzerinden F noktasına gidip buradan A noktasına en kısa yolu kullanarak geri dönmüştür. Buna göre karıncanın gidişte aldığı yol dönerken aldığından kaç cm daha uzundur?



Şekil 2.1.28

6. “Şekil 2.1.29”da bir duvara 7 m geriden dayanmış, 25 m uzunluğundaki merdiven gösterilmiştir. Bu merdivene güvenli bir şekilde çıkmak için merdivenin alt ayağının duvara olan uzaklığının, merdivenin üst ucunun yere olan uzaklığının dörtte birinden büyük olması gerekmektedir. Buna göre yandaki merdivenin bu duruşunun güvenli olup olmadığını açıklayınız.

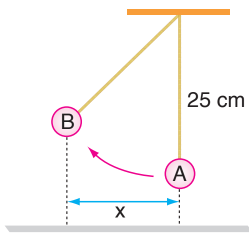


Şekil 2.1.29

7. "Şekil 2.1.30" da 25 cm lik ipe bağlı sarkaç gösterilmiştir. Sarkaç A konumundan (*serbest durduğu konum*), B konumuna geldiğinde ilk duruma göre yerden 10 cm yükselmiştir.

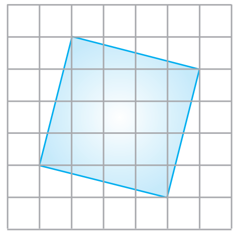
Buna göre sarkacın ilk duruma göre yatayda aldığı yol olan x in kaç cm olduğunu bulunuz.

Şekil 2.1.30



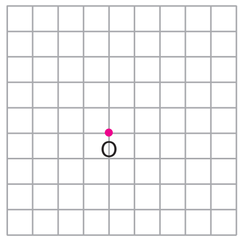
8. "Şekil 2.1.31" de birim kareli kâğıt üzerinde verilen karenin kenar ve köşegen uzunluğunu hesaplayınız.

Şekil 2.1.31



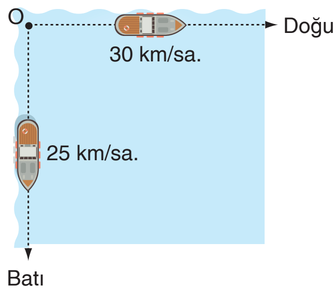
9. "Şekil 2.1.32" de birim kareli kâğıt üzerinde verilen O noktasına; $\sqrt{5}$ br uzaklıkta bir A noktasını ve $\sqrt{17}$ br uzaklıkta bir B noktasını işaretleyiniz.

Şekil 2.1.32



10. Günlük Hayat Bağlantısı "Şekil 2.1.33" te O noktasından aynı anda doğu yönünde 30 km/sa. hızla ve güney yönünde 25 km/sa. hızla harekete başlayan iki tekne gösterilmiştir. Buna göre teknelerin sabit hızla ilerledikleri düşünülürse 2 saat sonra aralarındaki uzaklığın kaç km olacağını bulunuz.

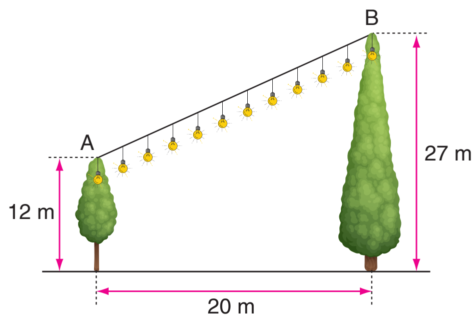
Şekil 2.1.33



11. Birinin kenar uzunluğu diğerinden 3 cm daha uzun olan iki karenin köşegen uzunlukları arasındaki farkın kaç cm olacağını bulunuz.

12. Günlük Hayat Bağlantısı "Şekil 2.1.34" te yere dik konumda bulunan iki ağacın arasındaki mesafe ve ağaçların boyları verilmiştir. Ağaçların A ve B ile gösterilen uçlarının arasına gerilecek kabloya, kablonun uçlarına da birer lamba gelecek şekilde 50 cm de bir lamba takılacaktır. Buna göre bu iş için kaç tane lambanın gerekli olacağını bulunuz.

Şekil 2.1.34



Dik Üçgende Trigonometrik Oranlar

Uçaklar motorları sayesinde hızla öne doğru hareket ettiklerinde hava akımı kanatların alt ve üst yüzeyleri arasında basınç farkı oluşturur. Uçağın hızı çok yüksek seviyelere çıktığında hava basıncı farkı da belirli bir seviyeye ulaşır ve uçak havalanır.

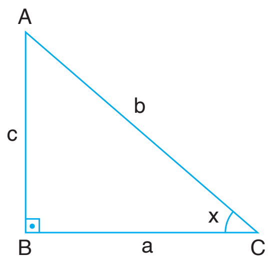
"Şekil 2.1.35"teki fotoğrafta saatte 480 km hızla, pist düzlemiyle 30° lik bir açı yapacak şekilde havalanan bir uçak gösterilmiştir. Bu durumda uçağın doğrusal rotasında hızını koruduğu düşünülürse 3 dakika içerisinde yerden kaç km yükseleceğini sizce hesaplayabilir miyiz? *(58. sayfadaki "22. Örnek"e bakınız.)*

Şekil 2.1.35



Bir dik üçgenin açıları ile kenar uzunlukları arasındaki ilişkiler trigonometrik oranlar biçiminde ifade edilir. "Şekil 2.1.36" daki dik üçgende C köşesindeki dar açının ölçüsü x olsun. x açısı için tanımlar ve gösterimler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Şekil 2.1.36



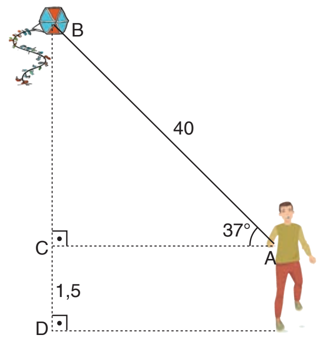
Trigonometrik Oranların Tanımı	*Gösterimi*
x açısının karşısındaki dik kenarın uzunluğunun, hipotenüsün uzunluğuna oranı x açısının sinüsüdür.	$\sin x = \frac{c}{b}$
x açısına komşu olan dik kenarın uzunluğunun, hipotenüsün uzunluğuna oranı x açısının kosinüsüdür.	$\cos x = \frac{a}{b}$
x açısının karşısındaki dik kenarın uzunluğunun, komşu olan dik kenarın uzunluğuna oranı x açısının tanjantıdır.	$\tan x = \frac{c}{a}$
x açısına komşu olan dik kenarın uzunluğunun, karşısındaki dik kenarın uzunluğuna oranı x açısının kotanjantıdır.	$\cot x = \frac{a}{c}$

14. Örnek

Günlük Hayat Bağlantısı

Kerem'in 40 metre uzunluğundaki gergin ipe bağlı uçurtmasının ipi yer düzlemiyle "Şekil 2.1.37" deki gibi 37° lik açı yapmaktadır. Kerem'in ipin ucunu tutan eli yerden 1,5 metre yüksekte ise uçurtmanın yerden yüksekliğinin yaklaşık olarak kaç metre olduğunu bulalım.

Şekil 2.1.37



Çözüm

ABC dik üçgeninde $\sin 37° = \dfrac{|BC|}{|AB|} \Rightarrow \sin 37° = \dfrac{|BC|}{40}$

$\Rightarrow |BC| = 40 . \sin 37°$ olur.

Hesap makinesi yardımıyla $\sin 37°$ nin eşitini bulabiliriz.

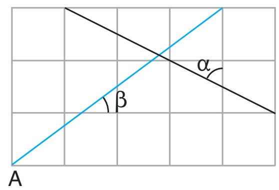
$\sin 37° \backsimeq 0{,}6018$ dir.

O hâlde $|BC| \backsimeq 0{,}6018 . 40 = 24{,}072$ m olacağından uçurtmanın yerden yüksekliği,
$24{,}072 + 1{,}5 \backsimeq 25{,}572$ m olur.

15. Örnek

"Şekil 2.1.38" deki birim kareli zemin üzerinde çizilen iki doğru parçasıyla oluşan α ve β açıları için $\cos\beta . \tan\alpha$ nın değerini bulalım.

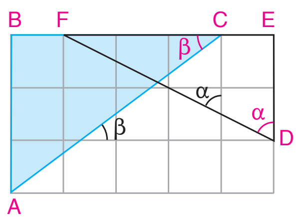
Şekil 2.1.38



Çözüm

"Şekil 2.1.39" da β açısını paralel doğrularda iç ters açıların özelliğini kullanarak ABC dik üçgeninde C açısına; α açısını da paralel doğrularda yöndeş açıların özelliğini kullanarak DEF dik üçgeninde D açısına eşleyebiliriz.

Şekil 2.1.39



Buna göre ABC dik üçgeninde,

$\cos\beta = \dfrac{|BC|}{|AC|} \Rightarrow \cos\beta = \dfrac{4}{5}$ tir. *(ABC dik üçgeni 3 – 4 – 5 üçgenidir.)*

DEF dik üçgeninde,

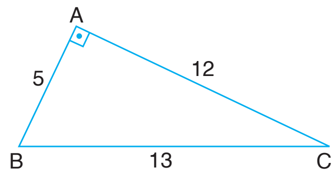
$\tan\alpha = \dfrac{|EF|}{|ED|} \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{4}{2} = 2$ dir.

O hâlde, $\cos\beta . \tan\alpha = \dfrac{4}{5} . 2 = \dfrac{8}{5}$ bulunur.

16. Örnek

"Şekil 2.1.40" taki ABC dik üçgeninde $m(\widehat{BAC}) = 90°$, |AB| = 5 cm, |AC| = 12 cm ve |BC| = 13 cm olduğuna göre B ve C açılarının trigonometrik oranlarını bulalım.

Şekil 2.1.40



Çözüm

$$\sin \widehat{B} = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{12}{13} \Leftrightarrow \cos \widehat{C} = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{12}{13},$$

$$\cos \widehat{B} = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{5}{13} \Leftrightarrow \sin \widehat{C} = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{5}{13},$$

$$\tan \widehat{B} = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{12}{5} \Leftrightarrow \cot \widehat{C} = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{12}{5},$$

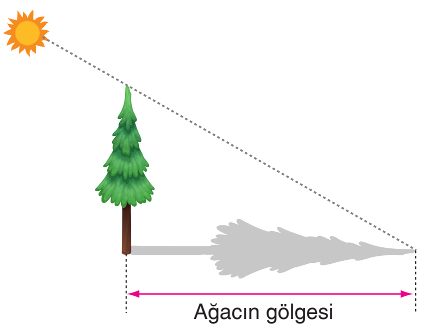
$$\cot \widehat{B} = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow \tan \widehat{C} = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{5}{12} \text{ bulunur.}$$

17. Örnek

Günlük Hayat Bağlantısı

"Şekil 2.1.41" de 20 metre boyundaki bir ağaç ve bu ağacın güneşli bir günde oluşan gölgesi gösterilmiştir. Güneş ışınlarının yer düzlemine 23° lik açıyla düştüğü bir anda ağacın oluşan gölge boyunun yaklaşık kaç metre olacağını bulalım.

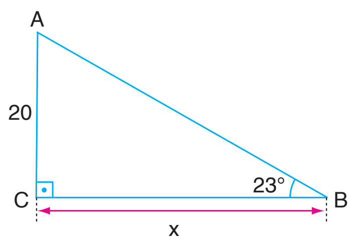
Şekil 2.1.41



Çözüm

Ağacın, gölgenin ve güneş ışınlarının oluşturduğu dik üçgen modeli "Şekil 2.1.42" de verilmiştir.

Şekil 2.1.42



Elimizdeki veriler 23° lik açı ve bu açının karşısındaki dik kenar uzunluğu olup sorulan uzunluk ise verilen açının komşu dik kenar uzunluğudur. Bu durumda karşı dik kenar uzunluğu ve komşu dik kenar uzunluğunun oranı olan tanjantı kullanabiliriz.

$$\tan \widehat{B} = \frac{|AC|}{|BC|} \Rightarrow \tan 23° = \frac{20}{x} \quad (\tan 23° \approx 0{,}4244)$$

$$\Rightarrow 0{,}4244 = \frac{20}{x}$$

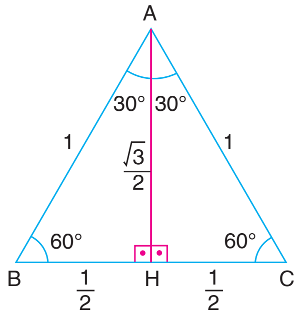
$$\Rightarrow x = \frac{20}{0{,}4244}$$

$$\Rightarrow x \approx 47{,}13 \text{ m bulunur.}$$

İnceleyelim

I. Ölçüleri 30° ve 60° olan açıların trigonometrik oranlarını, "Şekil 2.1.43" teki kenar uzunluğu 1 br olan eşkenar üçgenden faydalanarak bulalım.

Şekil 2.1.43



[AH] yüksekliğini çizelim.

AHC dik üçgeninde Pisagor teoreminden,

$$|AH|^2 = |AC|^2 - |HC|^2 \Rightarrow |AH|^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow |AH|^2 = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow |AH| = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ br bulunur.}$$

ABH dik üçgeninde,

$$\sin 60° = \frac{|AH|}{|AB|} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \sin 30° = \frac{|BH|}{|AB|} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2},$$

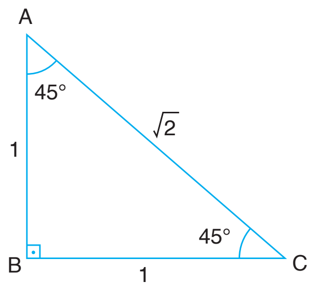
$$\cos 60° = \frac{|BH|}{|AB|} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}, \qquad \cos 30° = \frac{|AH|}{|AB|} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\tan 60° = \frac{|AH|}{|BH|} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}, \qquad \tan 30° = \frac{|BH|}{|AH|} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\cot 60° = \frac{|BH|}{|AH|} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad \cot 30° = \frac{|AH|}{|BH|} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \text{ olur.}$$

II. Ölçüsü 45° olan açıların trigonometrik oranlarını "Şekil 2.1.44" teki dik kenarlarının uzunluğu 1 br olan ikizkenar dik üçgenden faydalanarak bulalım.

Şekil 2.1.44



Pisagor teoreminden,

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 \Rightarrow |AC|^2 = 1^2 + 1^2$$

$$\Rightarrow |AC|^2 = 2 \Rightarrow |AC| = \sqrt{2} \text{ br olur.}$$

ABC dik üçgeninde,

$$\sin 45° = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \cos 45° = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

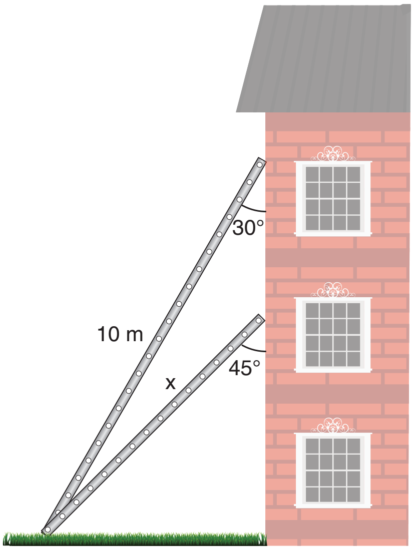
$$\tan 45° = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{1}{1} = 1, \qquad \cot 45° = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{1}{1} = 1 \text{ olur.}$$

18. Örnek

Günlük Hayat Bağlantısı

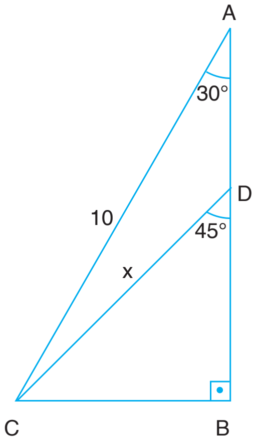
"Şekil 2.1.45" te ayakları aynı noktaya konulmuş, binanın yan duvarıyla 30° ve 45° lik açı yapan iki merdiven gösterilmiştir. Merdivenlerden duvar düzlemiyle 30° lik açı yapanın uzunluğu 10 metre olduğuna göre diğer merdivenin uzunluğunun kaç metre olduğunu bulalım.

Şekil 2.1.45



Çözüm

Şekil 2.1.46



Soruda verilen durumu "Şekil 2.1.46" daki gibi modelleyebiliriz. ABC dik üçgeninde A açısının ölçüsü ve hipotenüs uzunluğu bilindiğinden ortak [BC] kenarının uzunluğunu bulmak için açının sinüsünü kullanmalıyız.

$$\sin \widehat{A} = \frac{|BC|}{|AC|} \Rightarrow \sin 30° = \frac{|BC|}{10} \quad \left(\sin 30° = \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{|BC|}{10}$$

$$\Rightarrow 2.|BC| = 10$$

$$\Rightarrow |BC| = 5 \text{ m dir.}$$

CBD dik üçgeninde de D açısının ölçüsü ve karşı dik kenar uzunluğu bilindiğinden hipotenüs uzunluğunu bulmak için açının sinüsünü kullanmalıyız.

$$\sin \widehat{D} = \frac{|BC|}{|CD|} \Rightarrow \sin 45° = \frac{5}{|CD|} \quad \left(\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5}{|CD|}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}.|CD| = 10$$

$$\Rightarrow |CD| = \frac{10}{\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} \text{ m}$$

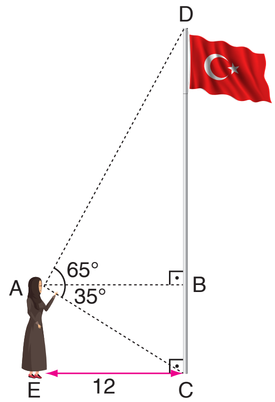
$$\Rightarrow |CD| = \frac{10\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow |CD| = 5\sqrt{2} \text{ m} \quad \text{bulunur.}$$

19. Örnek

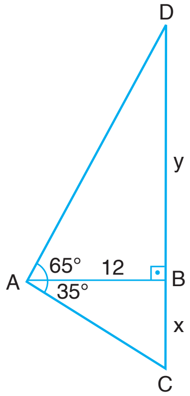
"Şekil 2.1.47" de bayrak töreninde görevli olan Kübra öğretmenin bayrak direğine göre konumu ve bakış açıları gösterilmiştir. $[AB] \perp [DC]$, $m(\widehat{DAB}) = 65°$, $m(\widehat{BAC}) = 35°$ ve $|EC| = 12$ m ise bayrak direğinin boyunun yaklaşık olarak kaç metre olduğunu bulalım.

Şekil 2.1.47



Çözüm

Şekil 2.1.48



Kübra öğretmenin bayrak direğine mesafesi ve bakış açıları "Şekil 2.1.48" deki ABC ve ABD dik üçgenleri ile modellenmiştir.

ABC üçgeninde bilinenler 35° lik açı ve bu açının komşu dik kenar uzunluğu olup bulmamız gereken uzunluk ise verilen açının karşı dik kenar uzunluğudur. Bu durumda karşı dik kenar uzunluğu ve komşu dik kenar uzunluğunun oranı olan tanjantı kullanabiliriz.

$$\tan \widehat{BAC} = \frac{|BC|}{|AB|} \Rightarrow \tan 35° = \frac{x}{12} \quad (\tan 35° \approx 0{,}7002)$$

$$\Rightarrow 0{,}7002 = \frac{x}{12} \Rightarrow x = 0{,}7002 . 12 = 8{,}4024 \text{ m dir.}$$

Yukarıdaki işlemi benzer sebeplerden dolayı ABD dik üçgeninde tekrarlayalım.

$$\tan \widehat{DAB} = \frac{|DB|}{|AB|} \Rightarrow \tan 65° = \frac{y}{12} \quad (\tan 65° \approx 2{,}1445)$$

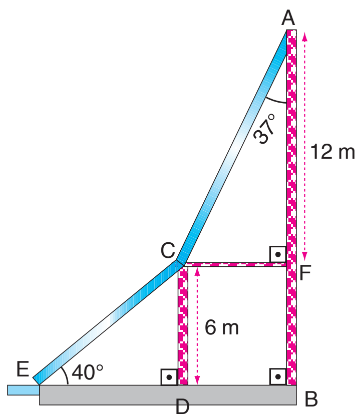
$$\Rightarrow 2{,}1445 = \frac{y}{12} \Rightarrow y = 2{,}1445 . 12 = 25{,}734 \text{ m dir.}$$

Buna göre bayrak direğinin uzunluğu yaklaşık olarak $|BC| + |DB| \approx 8{,}4 + 25{,}734 \approx 34$ metre bulunur.

20. Örnek

"Şekil 2.1.49" da bir su parkındaki su kaydırağının yandan görünümü modellenmiştir. Modelde $m(\widehat{CAB}) = 37°$, $m(\widehat{BEC}) = 40°$, $[AB] \perp [CF]$, $[EB] \perp [CD]$ ve $[EB] \perp [AB]$ dır. $|AF| = 12$ m ve $|CD| = 6$ m olduğuna göre kaydırağın toplam uzunluğu olan $|AC| + |CE|$ nın kaç metre olduğunu bulalım.

Şekil 2.1.49



Çözüm

AFC dik üçgeninde A açısının ölçüsü ve komşu dik kenarın uzunluğu bilindiğinden hipotenüs uzunluğunu bulmak için açının kosinüsünü kullanmalıyız.

$$\cos \widehat{A} = \frac{|AF|}{|AC|} \Rightarrow \cos 37° = \frac{12}{|AC|} \quad (\cos 37° \approx 0{,}8)$$

$$\Rightarrow 0{,}8 = \frac{12}{|AC|} \Rightarrow |AC| = \frac{12}{0{,}8} \Rightarrow |AC| = 15 \text{ m dir.}$$

Şimdi de kaydırağın alttaki kısmının uzunluğunu bulalım. CDE dik üçgeninde E açısının ölçüsü ve karşı dik kenarın uzunluğu bilindiğinden açının sinüsünü kullanmalıyız.

$$\sin \widehat{E} = \frac{|CD|}{|CE|} \Rightarrow \sin 40° = \frac{6}{|CE|} \quad (\sin 40° \approx 0{,}6428)$$

$$\Rightarrow 0{,}6428 = \frac{6}{|CE|} \Rightarrow |CE| = \frac{6}{0{,}6428} \Rightarrow |CE| \approx 9{,}3342 \approx 9 \text{ m dir.}$$

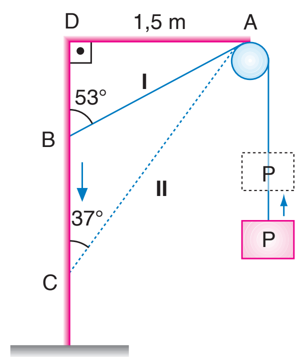
O hâlde kaydırağın toplam uzunluğunun yaklaşık değeri 15 + 9 = 24 metre bulunur.

21. Örnek

Günlük Hayat Bağlantısı

"Şekil 2.1.50" de bir sabit makara sistemine asılı P yükü gösterilmiştir. P yükünü taşıyan ip I konumunda düşey direkle 53° lik açı yapacak şekilde bağlanmıştır. Buna göre ip II konumundaki gibi düşey direkle 37° lik açı yapacak şekilde bağlanırsa P yükünün yaklaşık olarak kaç metre yukarı çıkacağını bulalım.

Şekil 2.1.50



Çözüm

Sabit makaralı sistemlerde ip ne kadar çekilirse yük o kadar yukarı çıkar.

Bu nedenle yükün ne kadar yukarı çıktığını bulabilmemiz için |AC| ile |AB| arasındaki farkı bulmalıyız.

ABD dik üçgeninde B açısının ölçüsü ve karşı dik kenarın uzunluğu bilindiğinden hipotenüs uzunluğunu bulmak için açının sinüsünü kullanmalıyız.

$$\sin \widehat{B} = \frac{|AD|}{|AB|} \Rightarrow \sin 53° = \frac{1{,}5}{|AB|} \quad (\sin 53° \approx 0{,}8)$$

$$\Rightarrow 0{,}8 = \frac{1{,}5}{|AB|}$$

$$\Rightarrow |AB| = \frac{1{,}5}{0{,}8}$$

$$\Rightarrow |AB| = 1{,}875 \text{ m dir.}$$

UYARI

Bir dik üçgende yapılacak trigonometrik hesaplamalarda eğer hipotenüs verilmiş ya da soruluyorsa sinüs ya da kosinüs; dik kenarlardan biri verilmiş diğeri soruluyorsa da tanjant ya da kotanjant kullanılır.

Yukarıdaki işlemi benzer sebeplerden dolayı ADC dik üçgeninde tekrarlayalım.

$$\sin \widehat{C} = \frac{|AD|}{|AC|} \Rightarrow \sin 37° = \frac{1{,}5}{|AC|} \quad (\sin 37° \approx 0{,}6)$$

$$\Rightarrow 0{,}6 = \frac{1{,}5}{|AC|}$$

$$\Rightarrow |AC| = \frac{1{,}5}{0{,}6}$$

$$\Rightarrow |AC| = 2{,}5 \text{ m dir.}$$

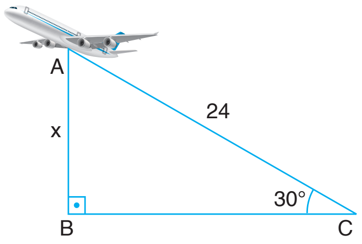
O hâlde ip I konumundan II konumuna getirildiğinde P yükünün yaklaşık olarak 2,5 – 1,875 = 0,625 metre yukarı çıkacağı bulunur.

22. Örnek

Konunun girişindeki problemi çözelim.

Çözüm

Saatte 480 km hızla kalkış yapan uçak 1 dakika sonra, $480:60=8$ km; 3 dakika sonra da $3.8=24$ km yol almış olur.



Şekil 2.1.51

Buna göre yer düzlemiyle 30° lik açı yapacak şekilde kalkan uçağın 3. dakikadaki konumunu ve yerden yüksekliği olan x uzunluğunu "Şekil 2.1.51" deki ABC dik üçgeninde olduğu gibi modelleyebiliriz.

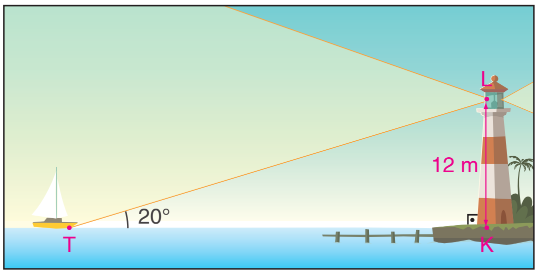
ABC dik üçgeninde C açısının ölçüsü ve hipotenüsün uzunluğu bilindiğinden karşı dik kenar uzunluğunu bulmak için açının sinüsünü kullanmalıyız.

$$\sin \widehat{C} = \frac{|AB|}{|AC|} \Rightarrow \sin 30° = \frac{x}{24} \quad (\sin 30° = 0,5)$$

$$\Rightarrow 0,5 = \frac{x}{24} \Rightarrow x = 0,5.24 \Rightarrow x = 12 \text{ km bulunur.}$$

23. Örnek

"Şekil 2.1.52" de kıyıya yaklaşmakta olan bir tekneye deniz fenerinden tutulan ışığın deniz yüzeyi ile yaptığı açının 20° olduğu gösterilmiştir. Işık kaynağının deniz seviyesinden yüksekliği 12 m olduğuna göre teknenin kıyıya uzaklığının yaklaşık kaç metre olduğunu bulalım.



Şekil 2.1.52

Çözüm

"Şekil 2.1.52" deki TKL dik üçgeninde bir dik kenar uzunluğu verilip diğeri sorulduğundan 20° nin tanjantını kullanmalıyız. Buna göre,

$$\tan \widehat{T} = \frac{|KL|}{|TK|} \Rightarrow \tan 20° = \frac{12}{|TK|} \quad (\tan 20° \approx 0,364)$$

$$\Rightarrow 0,364 = \frac{12}{|TK|}$$

$$\Rightarrow |TK| = \frac{12}{0,364}$$

$$\Rightarrow |TK| \approx 33 \text{ m bulunur.}$$

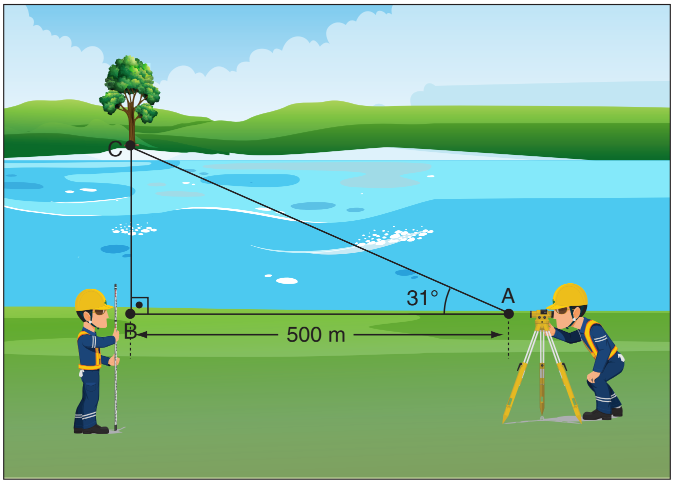
24. Örnek

Harita mühendisliği, yeryüzünün tamamının veya bir parçasının uydulardan konum belirleme gibi çeşitli tekniklerle ölçüm yaparak, bunları harita ve planlar şeklinde ifade eden mühendislik dalıdır. "Şekil 2.1.54"te bir nehrin üzerine yapılacak [BC] köprüsü için nehrin aynı yakasında ölçümler yapan, A ve B noktalarındaki harita mühendislerinin arasında 500 metre mesafe bulunmaktadır. Mühendislerden biri yaptığı ölçümlerde bulundukları yaka ile nehrin karşı yakasında C noktasındaki ağaç arasında $m(\widehat{BAC}) = 31°$lik açı olduğunu görmüştür. Buna göre nehrin üzerine yapılacak en kısa köprünün uzunluğunun yaklaşık olarak kaç metre olacağını bulalım.

Şekil 2.1.53



Şekil 2.1.54



Çözüm

"Şekil 2.1.54"teki ABC dik üçgeninde bir dik kenar uzunluğu verilip diğeri sorulduğundan 31° nin tanjantını kullanmalıyız.

Buna göre,

$$\tan 31° = \frac{\text{Köprü uzunluğu}}{500} \quad (\tan 31° \approx 0{,}6008)$$

$$0{,}6008 = \frac{\text{Köprü uzunluğu}}{500}$$

$$\text{Köprü uzunluğu} = 0{,}6008 \,.\, 500$$

$$\text{Köprü uzunluğu} \approx 300 \text{ m bulunur.}$$

25. Örnek

Doğa sporlarından biri olan dağcılığı diğer spor dallarından ayıran en önemli nokta, bunun bir yarış olmamasıyla birlikte seyircisinin bulunmamasıdır. Bu nedenle sporu yapan kişinin üst seviyede disipline ve kendi sorumluluk bilincine sahip olması gerekmektedir.

Şekil 2.1.55

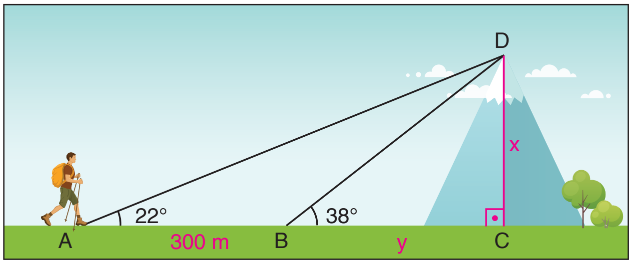


Deniz'in "Şekil 2.1.55" te gösterilen zirveye çıkmadan önce zeminde bulunduğu noktanın dağın zirvesiyle yaptığı açı $22°$ dir. Deniz, zemindeki noktasından dağa doğru 300 metre ilerlediğinde varacağı noktanın zirve ile yapacağı açı $38°$ olmaktadır. Buna göre Deniz'in zirve noktasına ulaştığında yerden yaklaşık olarak kaç metre yükseklikte olacağını bulalım.

Çözüm

Soruda verilen durum "Şekil 2.1.56" da modellenmiştir. Modelde dik kenarlar kullanılacağından açıların tanjantlarını kullanmalıyız.

Şekil 2.1.56



BCD dik üçgeninde,

$$\tan \widehat{CBD} = \frac{|CD|}{|BC|} \Rightarrow \tan 38° = \frac{x}{y} \quad (\tan 38° \approx 0,8)$$

$$\Rightarrow 0,8 = \frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{\cancel{8}^{4}}{\cancel{10}^{5}}$$

$$\Rightarrow x = 4k \text{ ve } y = 5k \ (k \in \mathbb{Z}) \text{ dir.}$$

ACD dik üçgeninde,

$$\tan \widehat{CAD} = \frac{|CD|}{|AC|} \Rightarrow \tan 22° = \frac{x}{300+y} \quad (\tan 22° \approx 0,4)$$

$$\Rightarrow 0,4 = \frac{x}{300+y}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{10}^{5}} = \frac{4k}{300+5k}$$

$$\Rightarrow 2.(300+5k) = 5.4k$$

$$\Rightarrow 600 + 10k = 20k$$

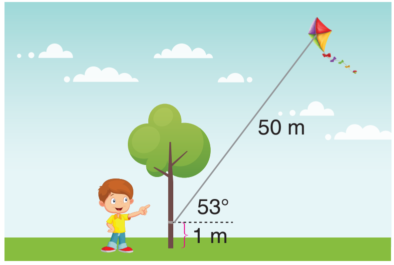
$$\Rightarrow k = 60 \text{ m dir.}$$

O hâlde Deniz'in ulaştığı zirve noktasında yerden yaklaşık $|CD| = x = 4k = 4.60 = 240$ metre yükseklikte olduğu bulunur.

2. Öğrendiklerimizi Uygulayalım

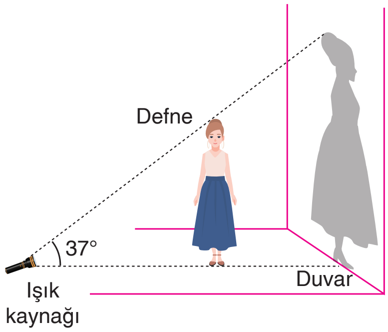
1. Yunus uçurtmasının ipini 50 metre açtıktan sonra "Şekil 2.1.57"deki gibi ağacın gövdesine yerden 1 metre yükseklikteki bir noktaya bağlamıştır. Uçurtmanın gergin ipi yatayla 53° lik açı yapacak şekilde uçtuğuna göre uçurtmanın yerden yüksekliği kaç metredir? *(sin 53° ≈ 0,8 alınız.)*

Şekil 2.1.57



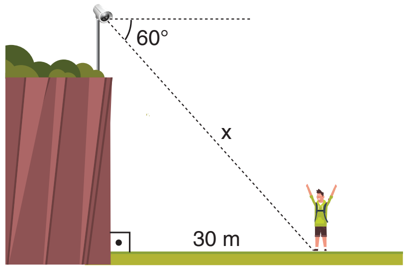
2. "Şekil 2.1.58"de Defne, ışık kaynağı, Defne'nin gölgesi ve ışığın yer düzlemi ile yaptığı 37° lik açı gösterilmiştir. Defne, ışık kaynağına 2 m ve gölgesine 1,2 m uzaklıkta olduğuna göre gölgesinin boyu Defne'nin boyundan kaç cm daha uzundur? *(tan 37° ≈ 0,75 alınız.)*

Şekil 2.1.58



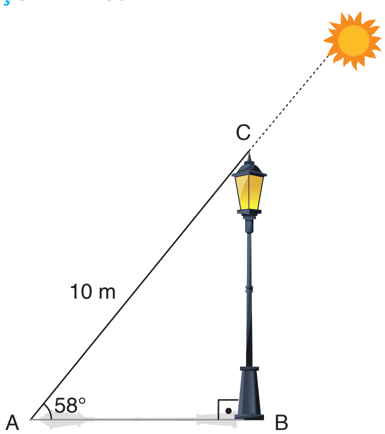
3. "Şekil 2.1.59"da tepenin üzerindeki güvenlik kamerası ve tepeye 30 metre mesafede yerde duran Özgür'ün konumu gösterilmiştir. Kamera Özgür'ün bulunduğu noktaya yatayla 60° lik açı yapacak şekilde kayıt yaptığına göre kamera ile Özgür arasındaki x uzaklığının kaç m olduğunu bulunuz.

Şekil 2.1.59



4. "Şekil 2.1.60"ta yere dik konumda bulunan bir sokak lambası ve gölgesi gösterilmiştir. Güneş ışınlarının yer düzlemiyle 58° lik açı yaptığı bir günde |AC| = 10 m olduğuna göre direğin boyu ile gölgesinin boyunun toplamı yaklaşık kaç metredir? *(sin 58° ≈ 0,8 ve cos 58° ≈ 0,5 alınız.)*

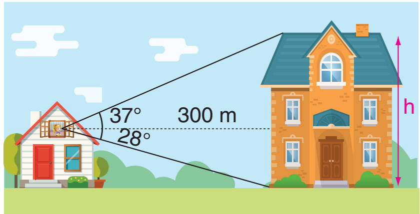
Şekil 2.1.60



5. $\sin 45° \cdot \cos 45° + \sin 30° + \cot 45°$ değerini bulunuz.

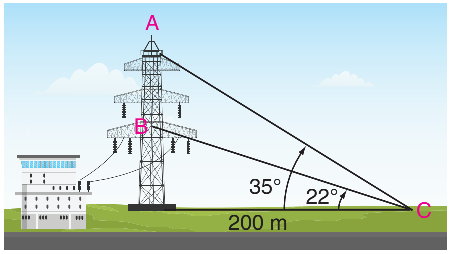
6. "Şekil 2.1.61" de Alp'lerin evi ve Alp'e 300 m mesafede bulunan komşularının binası gösterilmiştir. Alp penceresinden yandaki binanın en alt noktasına yatayla 28°, en üst noktasına da yatayla 37° lik açı yapacak şekilde bakmaktadır. Buna göre Alp'in baktığı binanın yüksekliğinin yaklaşık olarak kaç m olduğunu bulunuz. *(tan 28° ≈ 0,53 ve tan 37° = 0,75 alınız.)*

Şekil 2.1.61



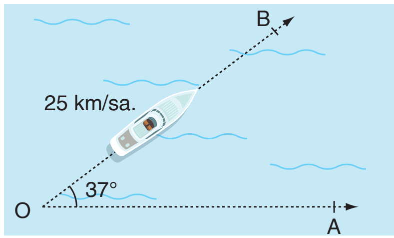
7. "Şekil 2.1.62" de yüksek gerilim hattına ait bir direk ile A ve B noktalarından direğe destek olması için C noktasına gerilmiş iki tel gösterilmiştir. B ve A noktalarındaki tellerin yer düzlemiyle yaptıkları açılar sırasıyla 22° ve 35° dir. Direğin C noktasına olan uzaklığı 200 m olduğuna göre direğin A ile B noktalarının arasındaki x uzunluğunun kaç m olduğunu bulunuz. *(tan 22° ≈ 0,4 ve tan 35° ≈ 0,7 alınız.)*

Şekil 2.1.62



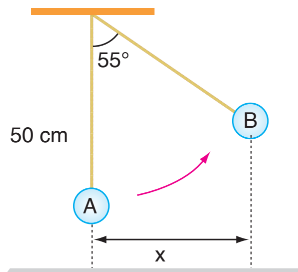
8. "Şekil 2.1.63" te saatteki hızı 25 km olan bir teknenin yatay [OA ile 37° lik açı yaparak oluşturduğu doğrusal rotası ([OB) gösterilmiştir. Buna göre O noktasından harekete başlayan teknenin 3 saat sonra [OA na uzaklığının kaç km olacağını bulunuz.
(sin 37° ≈ 0,6 ya da cos 37° ≈ 0,8 alınız.)

Şekil 2.1.63



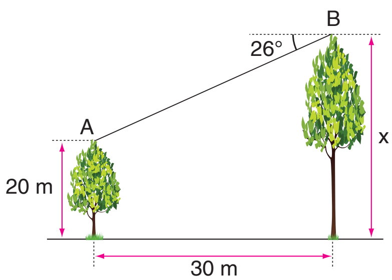
9. "Şekil 2.1.64" te 50 cm lik tele bağlı sarkaç gösterilmiştir. Sarkaç A konumundan *(serbest durduğu konum)*, 55° lik açı yaparak B konumuna getirilmiştir.
B konumunda sarkacın ilk duruma göre yatayda kaç cm yol aldığını (x) bulunuz. *(sin 55° ≈ 0,82 alınız.)*

Şekil 2.1.64



10. "Şekil 2.1.65" te yere dik konumda bulunan iki ağacın arasındaki mesafe 30 m dir. Boyu 20 m olan küçük ağacın tepesinden büyük ağacın tepesine gerilen kablonun yatayla yaptığı açının ölçüsü 26° olduğuna göre büyük ağacın boyunun kaç m olduğunu bulunuz.
(tan 26° ≈ 0,48 alınız.)

Şekil 2.1.65

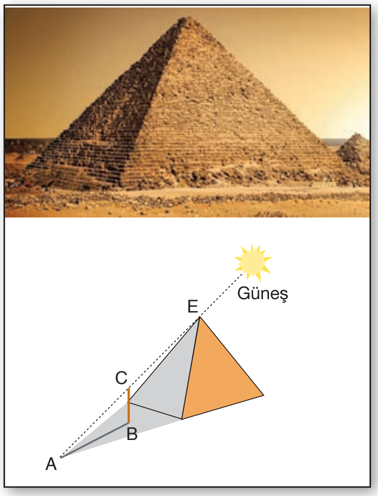


Üçgende Benzerlik Problemleri

Keops Piramit'i, Mısır'ın Kahire şehrindeki Gize mezar kentinde bulunan üç anıtsal piramitten en eski ve en büyük olanıdır. MÖ 2500'lü yıllarda yapıldığı sanılan bu anıtsal kompleks, dünyanın yedi harikasından biri olup bu yedi harikadan günümüze dek ulaşan tek eser olma niteliğini de taşır.

Firavun, Keops Piramit'ini inşa ettirirken yapının insanları dehşete düşürmesi için normal ölçüleri aşması, bir bakıma ulaşılmaz olmasını istiyordu. Bunu öğrenen Thales (Tales) piramidin yüksekliğini "Şekil 2.1.66"daki gibi bir düzenekle güneş ışınından ve benzer üçgenlerden yararlanarak bulur ve bir bakıma erişilemez olanı erişilenle ölçer. *(64. sayfadaki "27. Örnek"e bakınız.)*

Şekil 2.1.66

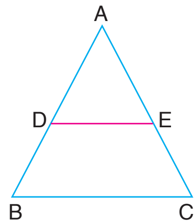


- *ABC üçgeninde [DE] // [BC] ise* $\dfrac{|AD|}{|AB|} = \dfrac{|AE|}{|AC|}$ *dir. (Temel Orantı teoremi)*

- *Orantılı parçaları aşağıdaki biçimlerde de ifade edebiliriz:*

$$\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AE|}, \quad \frac{|DB|}{|AB|} = \frac{|EC|}{|AC|}, \quad \frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AE|}{|EC|}, \quad \frac{|DB|}{|AD|} = \frac{|EC|}{|AE|} \quad \textit{dir.}$$

Şekil 2.1.67



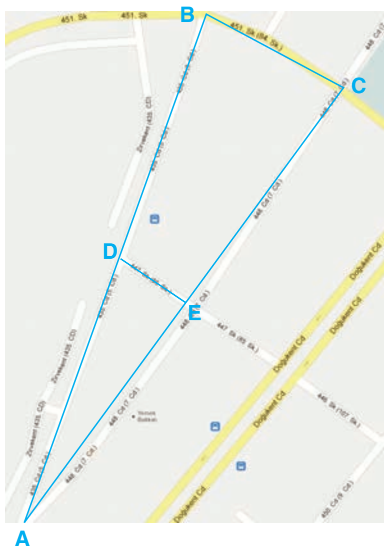
---

26. Örnek

Ankara'nın Çankaya ilçesindeki bir mahallenin bir bölümünün sokakları "Şekil 2.1.68"de gösterilmiştir. Bu sokakların modellenerek oluşturulduğu ABC ve ADE üçgenlerinde [DE] // [BC] dir.

|AB| = 450 m, |AC| = 400 m ve |AE| = 216 m olduğuna göre |DB| nun kaç m olduğunu bulalım.

Şekil 2.1.68



Çözüm

"Şekil 2.1.68"de verilen ABC üçgeninde [DE], üçgenin [BC] kenarına paralel olduğundan temel orantı teoremi kullanılabilir. Temel orantı teoremine göre,

$$\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|AE|}{|AC|} \Rightarrow \frac{|AD|}{450} = \frac{216}{400}$$

$$\Rightarrow |AD| = \frac{450.216}{400}$$

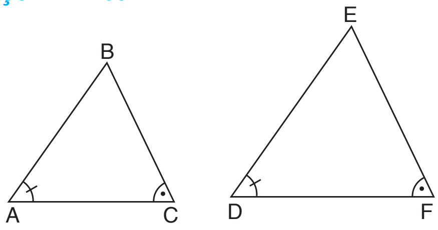
$$\Rightarrow |AD| = 243\,\text{m dir.}$$

$$|AB| = |AD| + |DB| \Rightarrow 450 = 243 + |DB|$$

$$\Rightarrow |DB| = 207\ \text{m bulunur.}$$

İki üçgen arasında yapılan bire bir eşlemede, karşılıklı ikişer açıları eş ise üçgenler benzerdir. Bu benzerliğe Açı - Açı (A.A.) benzerliği denir.

Şekil 2.1.69



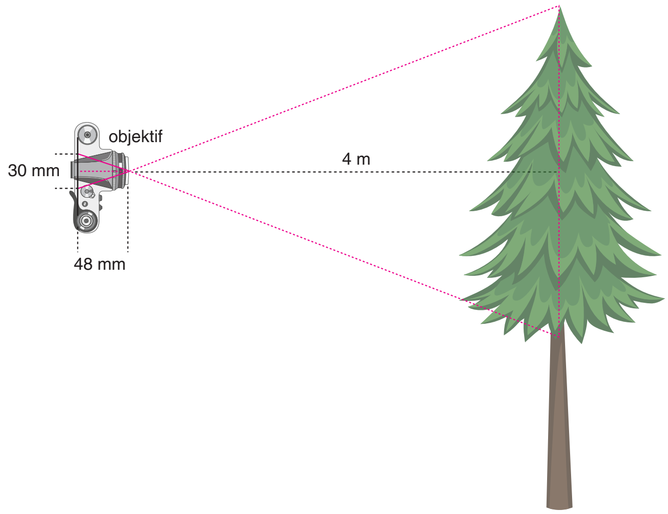
$\left.\begin{matrix} m(\widehat{A}) = m(\widehat{D}) \\ m(\widehat{C}) = m(\widehat{F}) \end{matrix}\right\}$ *ise* $\overset{\frown}{ABC} \sim \overset{\frown}{DEF}$ *olur. Dolayısıyla A.A benzerlik teoreminden eş açıların karşısındaki kenarların uzunlukları orantılıdır. Buradan* $\dfrac{|AB|}{|DE|} = \dfrac{|AC|}{|DF|} = \dfrac{|BC|}{|EF|} = k$ *olur. Burada ikişer açısı eş olan üçgenin üçüncü açıları da eş olacaktır.*

27. Örnek

Fotoğraf makinelerinde güneşten gelen ışık nesnelere çarparak objektife gelir. Objektifte toplanan ışığın miktarı ayarlanarak fotoğraf makinesinin gövdesine gönderilir ve bu şekilde görüntü kaydedilmiş olur.

“Şekil 2.1.70”te bir ağacın yerden 2 m yükseklikteki kısmının 4 m uzaklıktan fotoğrafının çekilme anı modellenmiştir. Fotoğraf makinesinin objektifi ile görüntünün oluştuğu gövde arasındaki mesafe 48 mm, gövdede oluşan ağacın görüntüsünün boyu da 30 mm olduğuna göre ağacın gerçekteki uzunluğunun kaç m olduğunu bulalım.

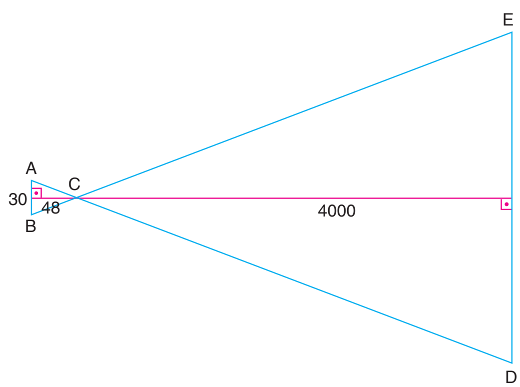
Şekil 2.1.70



Çözüm

Örnekte verilen durumu “Şekil 2.1.71”deki gibi modelleyebiliriz. Burada [AB] // [DE] olup Açı – Açı benzerlik teoreminden $\overset{\frown}{ABC} \sim \overset{\frown}{DEC}$ dir. Benzer üçgenlerde yardımcı elemanların uzunluklarının oranı benzerlik oranına eşittir. O hâlde ağacın fotoğrafı çekilen kısmının uzunluğu,

Şekil 2.1.71



$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{48}{4000} \Rightarrow \frac{30}{|DE|} = \frac{48}{4000} \quad (4\ m = 4000\ mm)$$

$$\Rightarrow 48.|DE| = 30.4000 \Rightarrow |DE| = \frac{120\,000}{48} \Rightarrow |DE| = 2500\ mm = 2,5\ m \ \text{dir.}$$

Fotoğrafı çekilen kısım yerden 2 m yükseklikte olduğu için ağacın boyu 2 + 2,5 = 4,5 m bulunur.

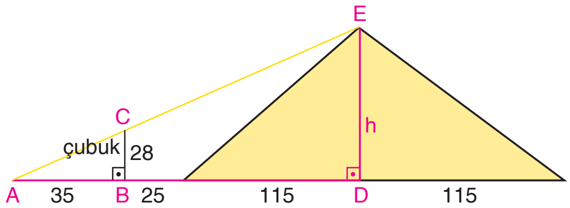
28. Örnek

Konunun girişinde Tales'in, taban kenar uzunluğu 230 m olan Keops Piramiti'nin yüksekliğini, bir çubuk ve güneş ışınları yardımıyla ölçtüğünden bahsetmiştik. 28 m uzunluğundaki bir [CB] çubuğunun piramidin taban kenarından 25 m uzaklıkta yere dik olarak konumlandırıldığında gölgesinin |AB| = 35 m uzunlukta olduğunu düşünerek piramidin yüksekliğinin kaç m olduğunu bulalım.

Çözüm

Modellememizi "Şekil 2.1.72"deki gibi piramidin yandan görünümüyle yapalım.

Şekil 2.1.72



Piramidin tepe noktasının iz düşümü tabanın orta noktasına geleceğinden D noktası 230 m uzunluğundaki tabanı 115 m lik iki parçaya böler. [BC] // [DE] olduğundan ADE üçgeninde açı – açı benzerlik teoremine göre Keops Piramit'inin yüksekliği,

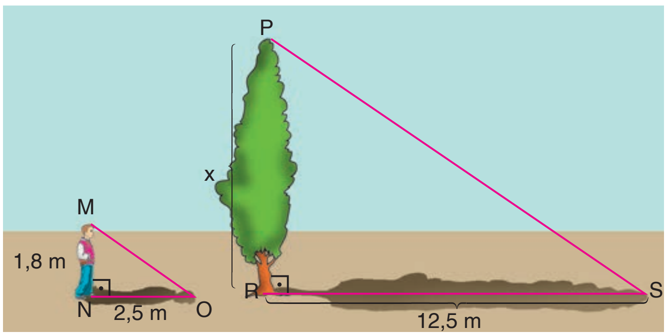
$$\widehat{ABC} \sim \widehat{ADE} \Rightarrow \frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|DE|} \Rightarrow \frac{35}{175} = \frac{28}{h} \Rightarrow 35 \cdot h = 4900 \Rightarrow h = 140 \text{ m}$$ bulunur.

29. Örnek

"Şekil 2.1.73"te güneşli bir günde yer düzlemine dik duran bir çocuk, bir ağaç ve bunların gölgeleri gösterilmiştir.

Çocuğun boyu 1,8 m ve gölgesinin boyu 2,5 m ise aynı anda gölgesinin boyu 12,5 m olan ağacın uzunluğunun kaç m olduğunu bulalım.

Şekil 2.1.73



Çözüm

Güneş ışınları yer düzlemine aynı açı ile geldiğinden ışınları temsil eden [MO] ve [PS], sırasıyla yer düzlemindeki [NO] ve [RS] ile aynı açıyı yapacaktır. Başka bir deyişle MNO üçgenindeki O açısı, PRS üçgenindeki S açısıyla eş olacaktır. Bu üçgenlerin dik olan N ve R açıları da eş olduğundan bu iki üçgen A.A. benzerlik teoremine göre benzerdir. Bu benzerliği $\widehat{MNO} \sim \widehat{PRS}$ şeklinde ifade edebiliriz.

$$\widehat{MNO} \sim \widehat{PRS} \Rightarrow \frac{|MN|}{|PR|} = \frac{|NO|}{|RS|}$$

$$\Rightarrow \frac{1,8}{x} = \frac{2,5}{12,5}$$

$$\Rightarrow x = 9 \text{ m}$$ bulunur.

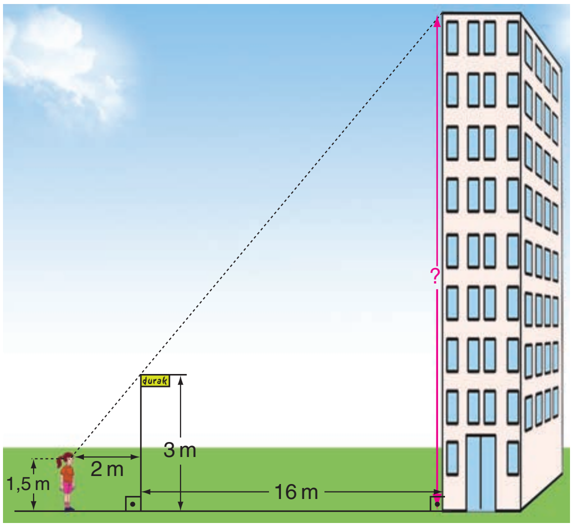
30. Örnek



"Şekil 2.1.74"te vermiş olduğu söz üzerine görme engelliler için kitap okuduğu merkeze gitmek üzere otobüs durağında bekleyen Fatma gösterilmiştir. Göz hizası yerden 1,5 metre yüksekteki Fatma, boyu 3 metre olan otobüs durağının direğinden 2 metre uzaktadır. Fatma'nın gözü, direğin uç noktası ve direğe 16 metre uzaklıkta bulunan binanın en üst noktası doğrusaldır.

Buna göre binanın yüksekliğinin kaç metre olduğunu bulalım.

Şekil 2.1.74



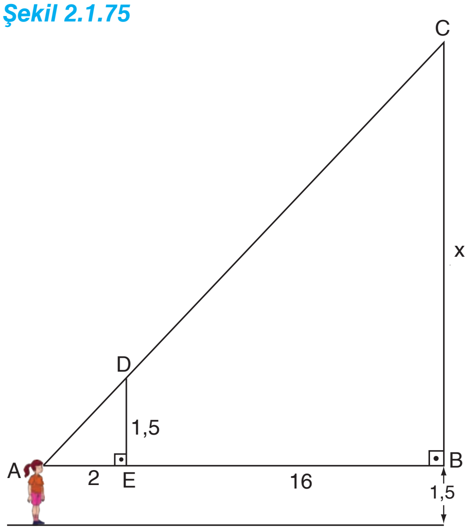
Çözüm

"Şekil 2.1.74"te otobüs durağındaki direk ve bina yer düzlemiyle 90° lik açı yapmaktadır. Bu durumda Fatma'nın göz hizasındaki yatay [AB], [DE] ve [BC] ile diktir. Ayrıca AED ve ABC üçgenlerinin A açısı ortak olduğundan A.A. benzerlik teoremine göre "Şekil 2.1.75"teki $\widehat{AED} \sim \widehat{ABC}$ olur. Bu benzerlikten,

$$\frac{|DE|}{|BC|} = \frac{|AE|}{|AB|} \Rightarrow \frac{1{,}5}{x} = \frac{2}{18} \Rightarrow x = 13{,}5 \text{ m bulunur.}$$

Bulunan bu 13,5 m değerine Fatma'nın gözünün yerden yüksekliği eklenirse binanın yüksekliği
13,5 + 1,5 = 15 m olarak bulunur.

Şekil 2.1.75



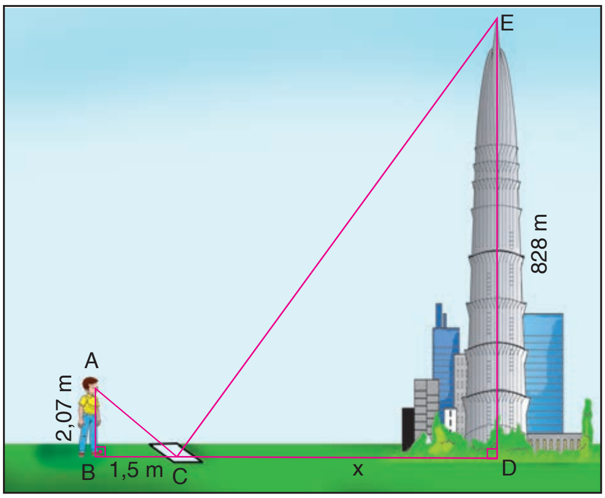
31. Örnek



Dubai'deki Burç Halife gökdeleni 828 m yüksekliğiyle dünyanın en yüksek yapılarından biridir. Dubai'yi gezmeye giden, göz hizası yerden 2,07 m yüksekte olan Ziya, yüksekliğini bildiği bu gökdeleni görür ve gökdelene olan uzaklığını hesaplamak ister. Ziya "Şekil 2.1.76"da görülen ve ayaklarından 1,5 m uzaklıkta bulunan düz ayna düzeneğini kurar.

Düz aynalar üzerlerine gelen ışınları aynı açı ile yansıtma özelliğine sahip olduğuna göre Ziya'nın gökdelene olan uzaklığının kaç m olduğunu bulalım.

Şekil 2.1.76



Çözüm

"Şekil 2.1.76" da sağda görülen ABC ve EDC üçgenlerinde C açıları eş olacaktır. B ve D açıları da dik olan bu üçgenler için A.A. benzerlik teoreminden $\widehat{ABC} \sim \widehat{EDC}$ dir.

Buna göre,

$$\frac{|AB|}{|ED|} = \frac{|BC|}{|DC|} \Rightarrow \frac{2,07}{828} = \frac{1,5}{x}$$

$$\Rightarrow x = 600 \text{ m dir.}$$

Buna göre Ziya'nın binaya olan uzaklığı,

$$|BD| = |BC| + |DC| \Rightarrow |BD| = 1,5 + 600$$

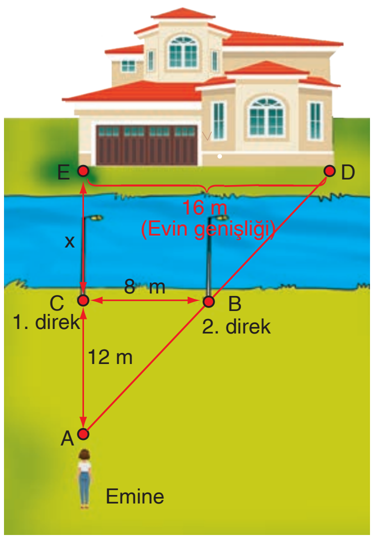
$$\Rightarrow |BD| = 601,5 \text{ m bulunur.}$$

32. Örnek

Emine, nehrin karşısında bulunan 16 m genişliğindeki evinin kendisine uzaklığını bulmak istiyor. Bunun için [ED] // [CB] olacak şekilde aralarında 8 m mesafe olan B ve C noktalarına iki direk diken Emine "Şekil 2.1.77" deki modeli oluşturmuştur.

|AC| = 12 m olduğuna göre evin Emine'ye kaç metre uzaklıkta olduğunu bulalım.

Şekil 2.1.77



Çözüm

$[BC]//[DE]$ olduğundan $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{AED})$ ve $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ADE})$ dir.

Bu durumda A.A. benzerlik teoreminden $\widehat{ACB} \sim \widehat{AED}$ yazılır.

$\widehat{ACB} \sim \widehat{AED}$ ve $|EC| = x$ ise

$$\frac{|AC|}{|AE|} = \frac{|CB|}{|ED|} \Rightarrow \frac{12}{12+x} = \frac{8}{16}$$

$$\Rightarrow 8.(12 + x) = 12.16$$

$$\Rightarrow 96 + 8x = 192$$

$$\Rightarrow 8x = 96$$

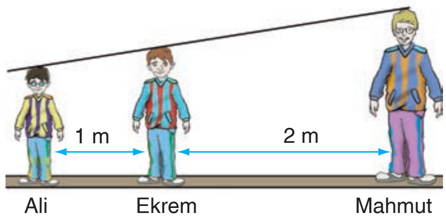
$$\Rightarrow x = 12 \text{ m dir.}$$

Evin, A noktasında bulunan Emine'ye uzaklığı $|AC| + |CE| = 12 + 12 = 24$ m dir.

33. Örnek

Ali, Ekrem ve Mahmut "Şekil 2.1.78"deki gibi yan yana ve aynı doğrultuda dizilmiştir. Ali ile Ekrem arasında 1 m, Ekrem ile Mahmut arasında 2 m mesafe bulunmaktadır.

Şekil 2.1.78

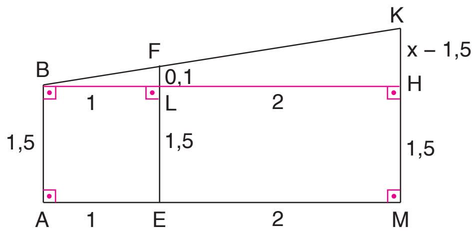


Ali'nin boyu 1,5 m, Ekrem'in boyu 1,6 m olduğuna göre Mahmut'un boyunun kaç m olduğunu bulalım.

Çözüm

Ali, Ekrem ve Mahmut sırasıyla birbirine paralel [AB], [EF] ve [KM] ile modellenerek "Şekil 2.1.79"da gösterilmiştir.

Şekil 2.1.79



[BH] // [MA] olacak şekilde [BH] çizelim. Bu durumda |FL| = 0,1 m ve |KH| = x – 1,5 m olur.

BHK üçgeninde [FL] // [KH] olduğundan A.A. benzerlik teoremine göre $\widehat{BLF} \sim \widehat{BHK}$ olur. Buna göre Mahmut'un boyu olan x,

$$\widehat{BLF} \sim \widehat{BHK} \Rightarrow \frac{|BL|}{|BH|} = \frac{|LF|}{|HK|}$$

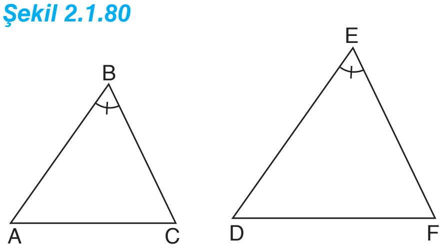
$$\Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{0,1}{x-1,5}$$

$$\Rightarrow x - 1,5 = 0,3$$

$$\Rightarrow x = 1,8 \text{ m bulunur.}$$

İki üçgen arasında yapılan bire bir eşlemede, iki üçgenin karşılıklı kenar uzunlukları orantılı ve bu orantılı kenarlar arasındaki açıların ölçüsü eşit ise bu iki üçgen benzerdir. Bu benzerliğe Kenar - Açı - Kenar (K.A.K.) benzerliği denir.

Şekil 2.1.80



$$\left.\begin{aligned} \frac{|BA|}{|ED|} &= \frac{|BC|}{|EF|} \\ m(\widehat{B}) &= m(\widehat{E}) \end{aligned}\right\} \textit{ ise } \widehat{ABC} \sim \widehat{DEF} \textit{ olur.}$$

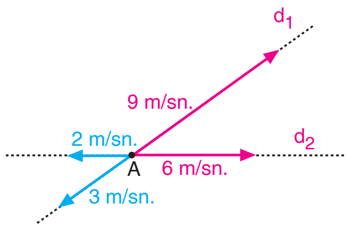
---

34. Örnek

"Şekil 2.1.81" de A noktasından harekete başlayan, d_1 ve d_2 doğrularının üzerinde hareket eden dört hareketlinin yönleri ve hızları gösterilmiştir.

Bu hareketlilerden mavi ile gösterilenlerin 4. saniye sonunda arasındaki mesafe 10 m olduğuna göre aynı anda kırmızı ile gösterilen hareketliler arasındaki mesafenin kaç metre olduğunu bulalım.

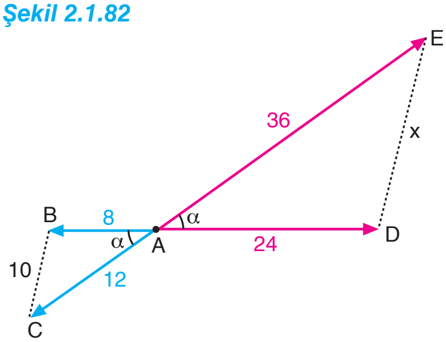
Şekil 2.1.81



Çözüm

Hareketlilerin 4. saniyede aldıkları yollar ve aralarındaki mesafelerin modellenerek oluşturulan ABC ve ADE üçgenleri "Şekil 2.1.82" deki gibi olur.

Şekil 2.1.82



$[BD] \cap [CE] = \{A\}$ olduğundan $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{DAE})$ dir.

CAB ve EAD üçgenlerinin A açısını oluşturan kenar uzunlukları arasında

$\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AE|} \Rightarrow \frac{8}{24} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$ orantısı vardır.

CAB ve EAD üçgenlerinin ikişer kenar uzunlukları orantılı ve bu kenarlar arasında oluşan açıları eş olduğundan K.A.K. benzerlik teoremine göre $\widehat{CAB} \sim \widehat{EAD}$ olur.

$\widehat{CAB} \sim \widehat{EAD} \Rightarrow \frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|CB|}{|ED|} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{10}{x} \Rightarrow x = 30$ m bulunur.

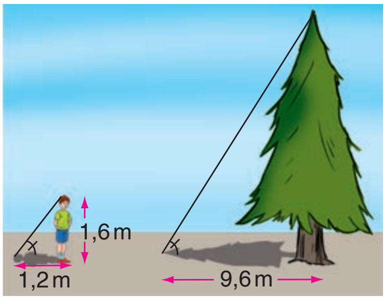
3. Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. Günlük Hayat Bağlantısı

"Şekil 2.1.83" teki şekilde bir ağacın önünde duran çocuğun boyu ile çocuğun ve ağacın gölgelerinin boyu verilmiştir.

Çocuk ve ağacın yere dik şekilde durdukları düşünülürse ağacın boyu ile çocuğun boyu arasında kaç metrelik fark vardır?

Şekil 2.1.83

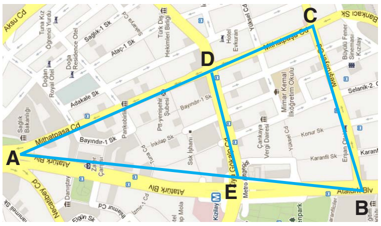


2. Günlük Hayat Bağlantısı

Ankara'nın merkezi sayılan Sıhhiye Kavşağı'na çıkan yollar "Şekil 2.1.84" te gösterilmiştir. Bu yolların modellenmesiyle oluşturulan ABC ve ADE üçgenlerinde $[DE] // [BC]$ dir.

$|AB| = 1100$ m, $|AE| = 700$ m ve $|AD| = 630$ m olduğuna göre $|DC|$ nun kaç m olduğunu bulunuz.

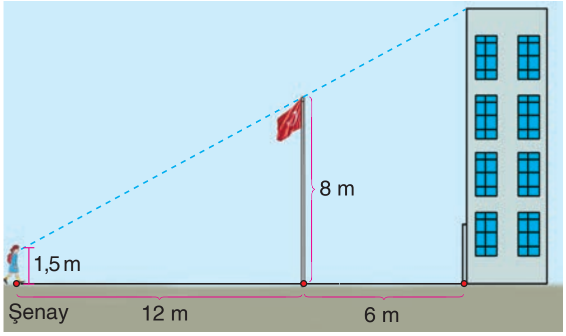
Şekil 2.1.84



3. Şenay, 8 m uzunluğundaki bayrak direği ile arasındaki mesafeyi, direğin tepe noktasına baktığında okulun tepe noktasını görecek şekilde ayarlıyor. Daha sonra bulunduğu nokta ile bayrak direği arasındaki mesafeyi 12 m, bayrak direği ile okul arasındaki mesafeyi ise 6 m olarak ölçüyor *("Şekil 2.1.85"e bakınız.)*.

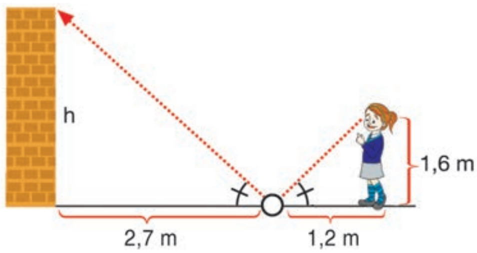
Zemin ile Şenay'ın göz hizası arasındaki mesafe 1,5 m olduğuna göre okul binasının yüksekliği kaç metredir?

Şekil 2.1.85



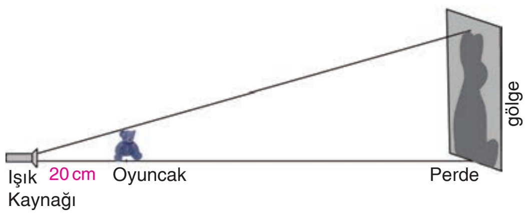
4. Zeynep'in gözünün yer düzleminden yüksekliği 1,6 m dir. Zeynep 1,2 m uzaklıktaki ayna ile aynaya 2,7 m uzaklıktaki duvarın yüksekliğini ölçmek istemektedir *("Şekil 2.1.86"ya bakınız.)*. Buna göre duvarın yüksekliğinin kaç m olduğunu bulunuz.

Şekil 2.1.86



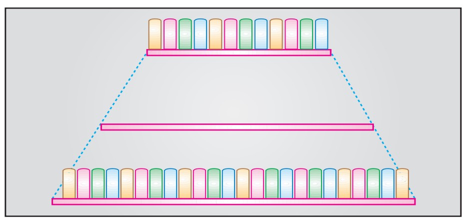
5. "Şekil 2.1.87"de ışık kaynağından çıkan ışığın kaynağa 20 cm uzaklıkta bulunan 25 cm boyundaki oyuncak ayı ve perdeye yansıyan 100 cm boyundaki gölgesi gösterilmiştir. Buna göre ışık kaynağının perdeye olan uzaklığının kaç cm olduğunu bulunuz.

Şekil 2.1.87



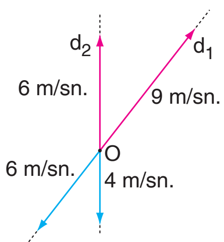
6. "Şekil 2.1.88"de Ali'nin odasındaki kitaplığın modeli gösterilmiştir. Kitaplığın rafları arasındaki uzaklıklar eşit ve raflar birbirine paraleldir. Ali, kitaplığın en üstteki rafına özdeş kitaplardan 12 tane, en alttakine de 24 tane kitap sığdırabiliyorsa ortadaki rafa kaç kitap sığdırabilir?

Şekil 2.1.88



7. "Şekil 2.1.89"da O noktasından harekete başlayan, d_1 ve d_2 doğrularının üzerinde hareket eden dört hareketlinin yönleri ve hızları gösterilmiştir. Bu hareketlilerden mavi ile gösterilenlerin 3. saniye sonunda arasındaki mesafe 16 m olduğuna göre aynı anda kırmızı ile gösterilen hareketliler arasındaki mesafenin kaç m olduğunu bulunuz.

Şekil 2.1.89



1. Aşağıdaki ifadeler doğruysa boş kutulara “D”, yanlışsa “Y” yazınız.

a. ☐ Bütün üçgenlerde Pisagor teoremi kullanılabilir.

b. ☐ Herhangi bir üçgende iki kenarın uzunluğunun karelerinin toplamı, en uzun kenarın uzunluğunun karesine eşittir.

c. ☐ Kenar uzunlukları ardışık tam sayılar olan bir dik üçgenin kenar uzunlukları 3 br, 4 br ve 5 br dir.

d. ☐ İki kenar uzunluğu 5 cm ve 12 cm olan bir dik üçgenin üçüncü kenar uzunluğu kesinlikle 13 cm dir.

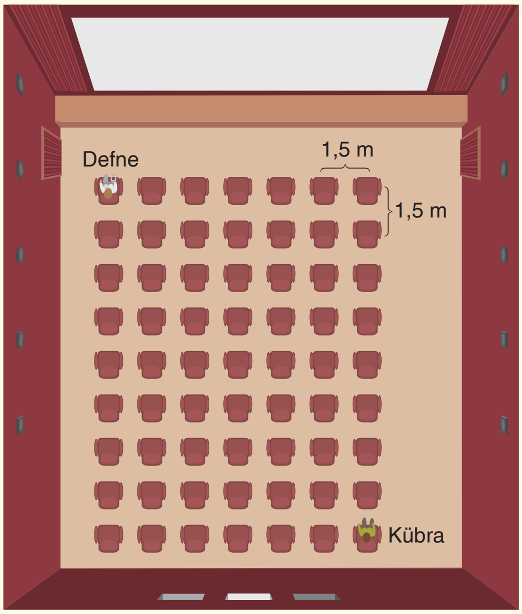
e. ☐ Dik üçgendeki bir A dar açısının sinüsü bulunurken, açının karşısındaki kenar uzunluğu hipotenüs uzunluğuna bölünür.

f. ☐ $\cos 60° = \frac{1}{2}$ dir.

g. ☐ $\tan 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dir.

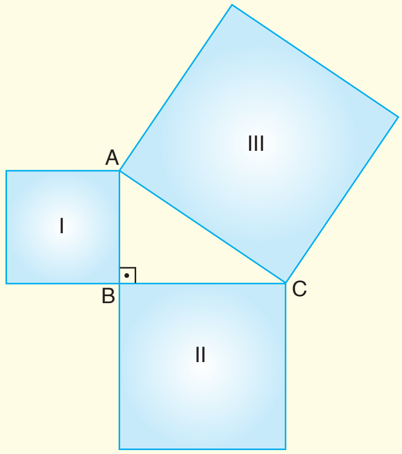
h. ☐ Benzer üçgenler aynı zamanda eştir.

2.



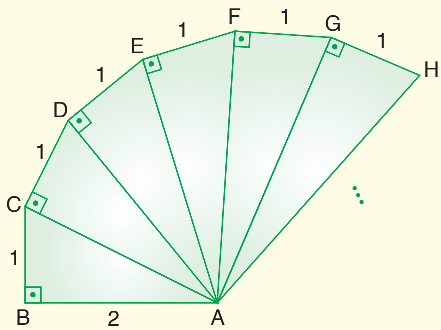
Yukarıda her koltuğun en yakındakine uzaklığı 1,5 m olan bir sinema salonunun üstten görüntüsü verilmiştir. Buna göre salonun iki ucundaki Defne ve Kübra’nın birbirine olan uzaklığı kaç metredir?

3.



I ve II numaralı karelerde [AB] ⊥ [BC] dir. I numaralı karenin alanı 25 cm^2, III numaralı karenin alanı 169 cm^2 olduğuna göre, II numaralı karenin bir kenar uzunluğu kaç cm dir?

4.



Yukarıdaki dik üçgen örüntüsünde |AB| = 2 br, |BC| = |CD| = |DE| = |EF| = |FG| = |GH| = 1 br dir. Buna göre en büyük üçgenin hipotenüs uzunluğu $2\sqrt{7}$ br olduğunda örüntüde kaç üçgen bulunur?

A) 23 B) 24 C) 25 D) 26 E) 27

5. Koordinat sisteminin O noktasından (orijinden) harekete başlayan Yunus sırasıyla 2 birim batıya, 3 birim güneye, 4 birim batıya, 2 birim güneye, 2 birim batıya, 1 birim kuzeye, 4 birim batıya ve 1 birim güneye gidiyor.

Buna göre Yunus ilk konumuna göre kaç birim yer değiştirmiştir?

A) 10 B) 13 C) 15 D) 18 E) 20

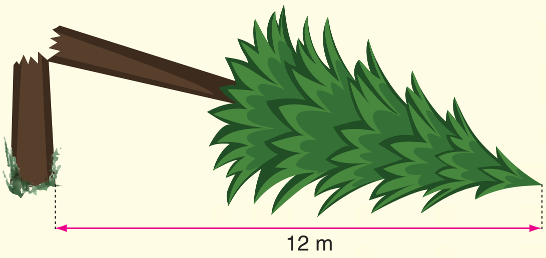
6. Aşağıda kenar uzunlukları verilen ABC üçgenlerinden hangilerinin birer dik üçgen olduğunu bulunuz.

a. $a = \sqrt{2}$ cm, $b = 3$ ve $c = 2\sqrt{2}$ cm

b. $a = \sqrt{3}$ cm, $b = 2$ ve $c = \sqrt{5}$ cm

c. $a = \sqrt{5}$ cm, $b = 2$ ve $c = 3$ cm

7.



Yağmurlu havalarda yıldırım düşme olasılığı yüksek olduğundan ağaçların altına saklanmak tehlikelidir. Yukarıdaki resimde boyu 18 m olan bir ağaç yıldırım düşmesi nedeniyle kırılmıştır. Ağacın kırılan parçasının ucu, gövdesinden 12 m uzakta yere değdiğine göre yıldırım ağaca yerden kaç m yukarıdan düşmüştür?

A) 3 B) 5 C) 8 D) 10 E) 12

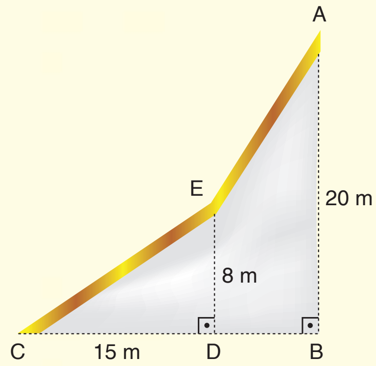
8.



Televizyonların fiyatları birçok etkene göre değişir. Bu etkenlerden en önemlisi köşegen uzunluğu olan ekran ölçüsüdür. Kenar uzunlukları 72 cm ve 96 cm olan dikdörtgensel bir televizyon kaç ekrandır?

A) 100 B) 106 C) 112 D) 116 E) 120

9.



Yandan görünümü verilen yukarıdaki kaykay pisti modelinde

$[AB] \perp [BC]$, $[ED] \perp [BC]$

$|ED| = 8$ m

$|CD| = 15$ m

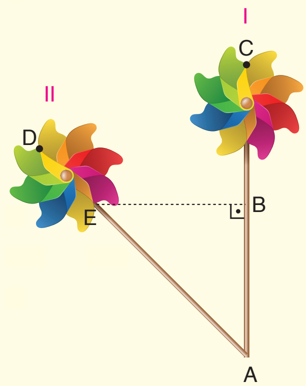
$|AB| = 20$ m

$|AE| + |EC| = 30$ m dir.

Buna göre A ile C noktalarının arasındaki en kısa uzaklık kaç metredir?

A) 25 B) 27 C) $20\sqrt{2}$ D) $27\sqrt{2}$ E) 28

10.

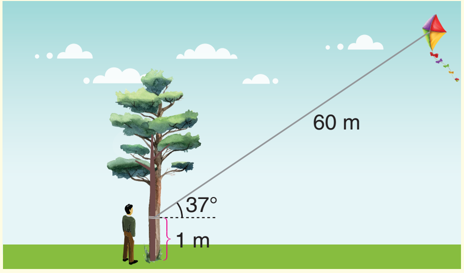


Yukarıda I konumunda iken şiddetli rüzgâr nedeniyle II konumundaki gibi eğilen rüzgârgülü gösterilmiştir.

A, B, C noktaları ve A, E, D noktaları doğrusal, $[BE] \perp [AC]$, $|BC| = 15$ br, $|BE| = 15$ br ve $|DE| = 10$ br olduğuna göre rüzgârgülünün boyu kaç br dir?

A) 20 B) 25 C) 30 D) 35 E) 40

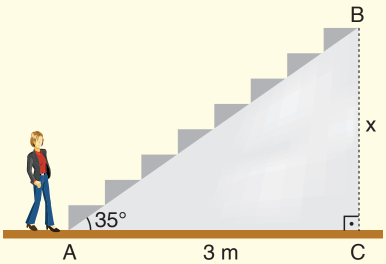
11.



Yukarıdaki resimde 60 m lik gergin ipe bağlı uçurtmasını ağacın gövdesine yerden 1 m yükseklikten bağlamış olan Ahmet gösterilmiştir. Uçurtmanın ipi yer düzlemiyle 37° lik açı yaptığına göre uçurtmanın yerden yüksekliği kaç metredir? *($\sin 37° \approx 0{,}6$ alınız.)*

A) 30 B) 36 C) 37 D) 42 E) 43

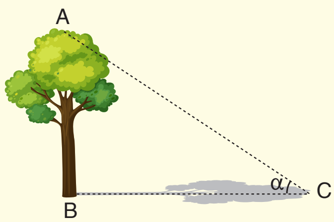
12.



Yukarıda yer düzlemiyle 35° lik açı yapan bir merdiven gösterilmiştir. Merdivende $|AC| = 3$ m olduğuna göre $|BC| = x$ kaç cm dir?
($\tan 35° \approx 0{,}7$ alınız.)

A) 140 B) 175 C) 200 D) 210 E) 225

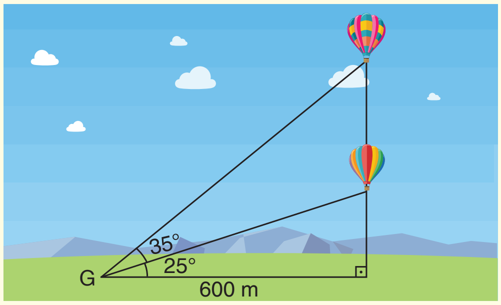
13. Yanda yere dik bir ağaç, gölgesi ve güneş ışınlarının yere geliş açısı olan α verilmiştir. Buna göre aşağıdakilerden hangisini tek başına bilen biri ağacın boyunu hesaplayabilir?



I. $\tan\alpha$ ve $|BC|$
II. $\sin\alpha$ ve $|AC|$
III. $\cot\alpha$ ve $|AC|$

A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve III
D) II ve III E) I, II ve III

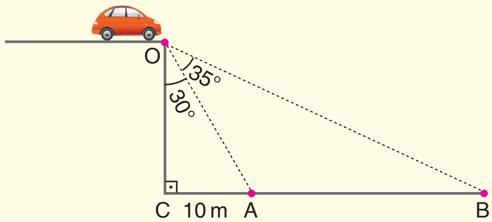
14.



Yukarıdaki şekilde yerden yüksekliği önemsenmeyen G noktasındaki gözlemcinin iki sıcak hava balonuna bakış açıları gösterilmiştir. Aynı düşey doğrultuda uçan balonların yer düzlemine iz düşümleri ile gözlemci arasında 600 metre mesafe olduğuna göre iki balonun sepetlerinin arasındaki mesafe kaç metredir?
($\tan 25° \approx 0{,}46$ ve $\cot 30° \approx 1{,}73$ alınız.)

A) 276 B) 762 C) 855 D) 954 E) 1038

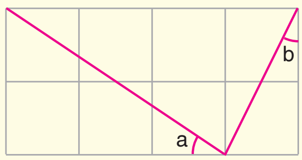
15.



Yukarıdaki şekilde yerden bir miktar yüksekte bulunan yoldaki oyuncak araba gösterilmiştir. Araba yavaşça bırakıldığında A noktasına, daha hızlı bırakıldığında da B noktasına düşmektedir. $m(\widehat{OCB}) = 90°$, $m(\widehat{COA}) = 30°$ ve $m(\widehat{AOB}) = 35°$ olduğuna göre A ile B noktalarının arasındaki mesafe kaç metredir?
($\cot 30° \approx 1{,}7$ ve $\tan 65° \approx 2{,}1$ alınız.)

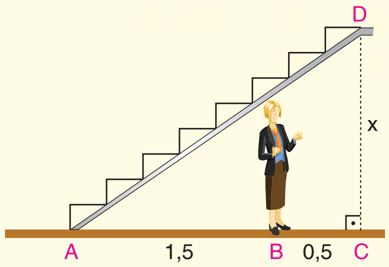
A) 25,7 B) 28,4 C) 30,5 D) 35,7 E) 42,9

16. Yandaki birim kareli zeminde verilenlere göre $\cot a . \tan b$ ifadesinin değeri kaçtır?



A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{1}{6}$ D) 2 E) 3

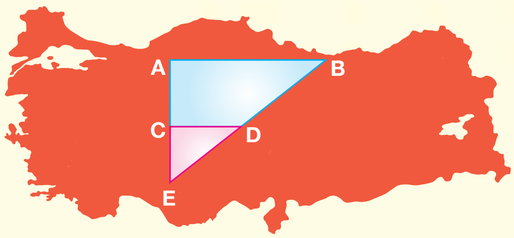
17.



Yukarıda bir merdivenin A noktasına dik durarak en çok 1,5 m yaklaşabilen 180 cm boyundaki Bilge gösterilmiştir. |BC| = 0,5 m olduğuna göre merdivenle en çok kaç metre yüksekliğe çıkılabilir?

A) 2,4 B) 2,3 C) 2,2 D) 2,1 E) 2

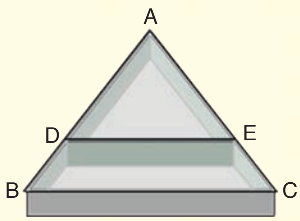
18.



Yukarıdaki harita üzerinde A, B, C, D ve E şehirleri arasında ölçüm yapmak isteyen bir öğrenci, C ile D şehirleri arasını 6 cm, A ile B şehirleri arasını 10 cm ve E ile C şehirleri arasını 1,5 cm olarak ölçmüştür. Şekildeki AB doğru parçası, CD doğru parçasına paralel olduğuna göre, haritada A ile C şehirleri arası kaç santimetredir?

A) 2,5 B) 2 C) 1,5 D) 1 E) 0,5

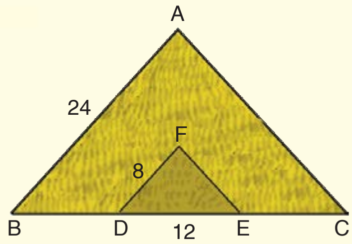
19. Yanda verilen üçgen şeklindeki kek kalıbı, üst kenarı [DE] ile ifade edilen levha yardımıyla bölündüğünden bu kalıpta aynı anda iki farklı kekin pişirilebilmesi mümkün olmaktadır.



[DE] // [BC], |AB| = 20 cm, |AC| = 30 cm ve |DB| = 4 cm olduğuna göre |AE| kaç cm dir?

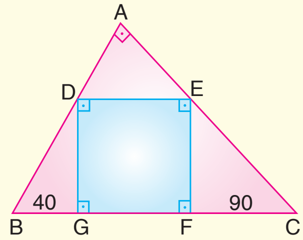
A) 6 B) 8 C) 12 D) 18 E) 24

20. Bir çiftçi ABC üçgensel bölgesi şeklindeki tarlasını, $\widehat{ABC} \sim \widehat{FDE}$ olacak şekilde biçtiğine göre, tarlanın [BC] kenarının uzunluğu kaç metredir?



A) 36 B) 32 C) 30 D) 28 E) 24

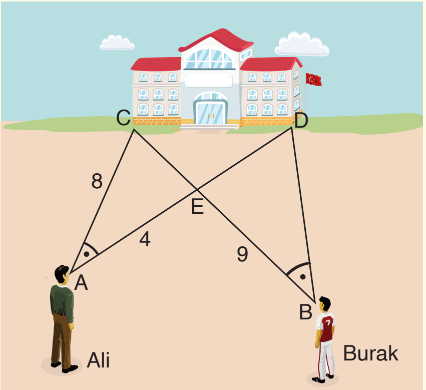
21. Ali üçgen şeklindeki çadırının içine küp şeklindeki kutusunu yerleştirdiğinde kutunun köşeleri çadırın yüzeyine değmektedir.



Yukarıda çadırın karşıdan görüntüsü modellenmiştir. [AB] ⊥ [AC], |BG| = 40 cm, |FC| = 90 cm olduğuna göre yerleştirilen kutunun bir kenar uzunluğu olan |DE| kaç cm dir?

A) 36 B) 45 C) 60 D) 75 E) 90

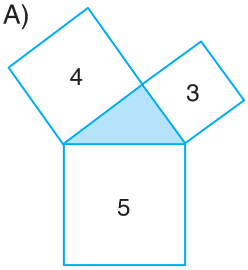
22.

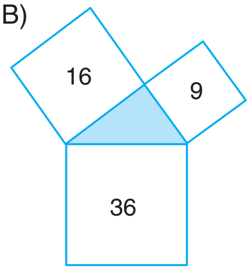


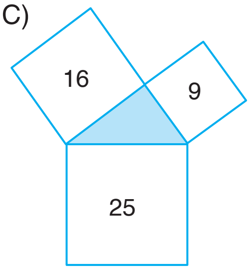
Ali ile Burak bulundukları noktalardan okul binasına aynı açı ile bakmaktadır.
|AC| = 8 m, |AE| = 4 m ve |EB| = 9 m olduğuna göre Burak D noktasına kaç metre uzaklıkta durmaktadır?

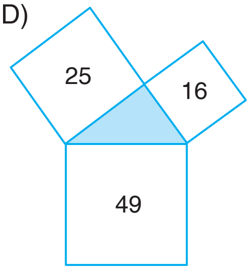
A) 12 B) 15 C) 16 D) 18 E) 27

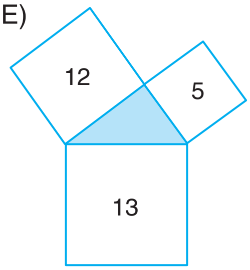
1. **Aşağıdaki seçeneklerin hangisinde alanları verilen karesel bölgelerin arasında kalan boyalı üçgen dik üçgendir?**

A)


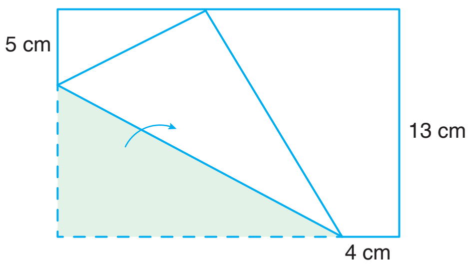
B)


C)


D)


E)


2.

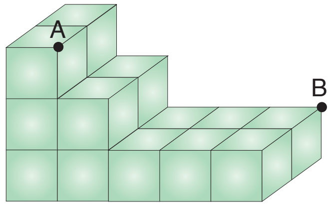


Kenar uzunlukları 13 cm ve 19 cm olan dikdörtgen şeklindeki kâğıt bir köşesinden tutularak şekildeki gibi katlanıyor.

Buna göre oluşan kat çizgisinin uzunluğu kaç santimetredir?

A) 17 B) 15 C) 13 D) 12 E) 9

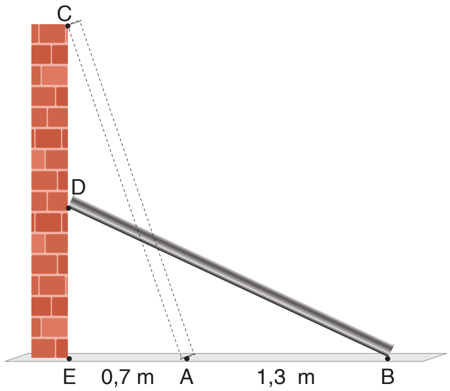
3.



Birim küplerle oluşturulmuş yukarıdaki yapıda A ile B noktası arasındaki en kısa uzaklık kaç birimdir?

A) $\sqrt{10}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $\sqrt{15}$ D) $3\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{6}$

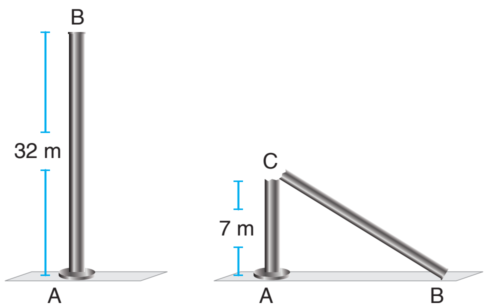
4.



2,5 m uzunluğundaki bir demir çubuğun B noktasındaki ucu A noktasına doğru 1,3 m kaydırıldığında duvardaki D noktasında bulunan diğer ucu kaç m yukarı çıkarak C noktasına gelir?

A) 2,4 B) 1,8 C) 1,2 D) 0,9 E) 0,8

5.

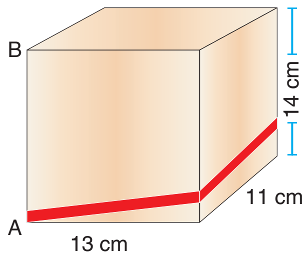


32 m uzunluğundaki yere dik olan direk C noktasından şekildeki gibi kırılmıştır.

Buna göre direğin B ucu A noktasından kaç m ileriye düşmüştür?

A) 24 B) 20 C) 18 D) 15 E) 12

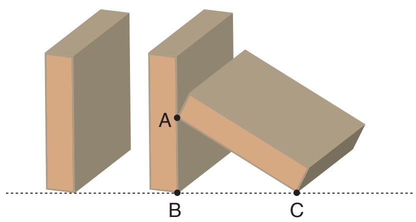
6. Ayrıt uzunlukları 11 cm, 13 cm ve 14 cm olan dikdörtgenler prizması şeklindeki bir kutuya A köşesinden başlayıp B köşesinde bitecek şekilde kurdele dolanmıştır.



Kurdele dik prizma şeklindeki kutunun yan yüzlerinin hepsinden geçtiğine göre en az kaç cm uzunluğundadır?

A) 25 B) 42 C) 46 D) 50 E) 56

7.

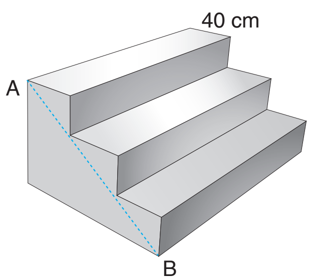


Birbirlerine 5 br uzaklıktaki paralel kutulardan biri dik duran diğerinin üzerine şekildeki gibi devrilmiştir.

Kutuların boyları 7 br olduğuna göre A noktasının yerden yüksekliği kaç birimdir?

A) $3\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{6}$ C) $\sqrt{21}$ D) $2\sqrt{5}$ E) $3\sqrt{2}$

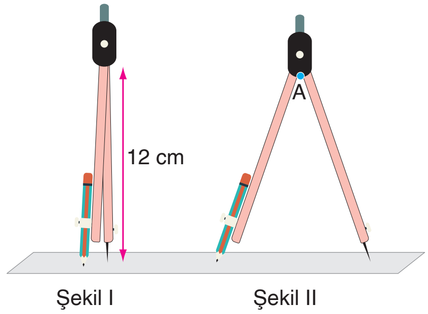
8. Yandaki şekilde her bir basamağı 40 cm genişliğinde olan 3 basamaklı merdiven gösterilmiştir.



|AB| = 150 cm olduğuna A noktasının yerden yüksekliği kaç santimetredir?

A) 80 B) 90 C) 100 D) 110 E) 120

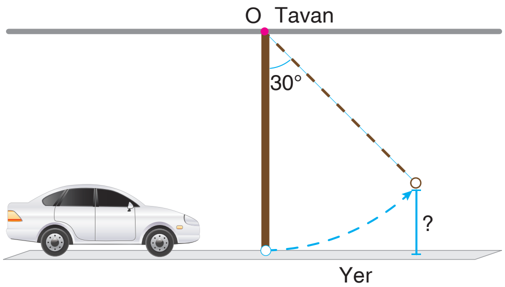
9.



Ayak uzunlukları 12 cm olan şekil I'deki pergelin ayakları şekil II'deki gibi 6 cm açıldığında A noktasının kâğıt düzleminden yüksekliği kaç santimetre olur?

A) $3\sqrt{15}$ B) $8\sqrt{2}$ C) 11
D) $\sqrt{111}$ E) $6\sqrt{3}$

10.

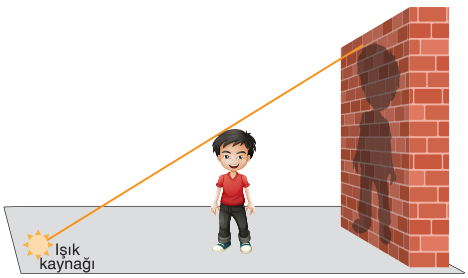


4 m uzunluğundaki bir garaj kapısı tavandaki O noktasından dönerek açılmaktadır.

Kapı 30° açıldığı anda alt ucu yerden kaç metre yükselmiş olur?

A) $2\sqrt{3}$ B) 2 C) $4-2\sqrt{3}$ D) $\sqrt{3}$ E) 1

11.

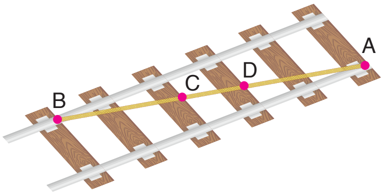


Yerdeki bir ışık kaynağının 1,6 m uzağında duran Yasin'in boyu 120 cm dir.

Yasin'in duvardaki gölgesinin uzunluğu 1,5 m olduğuna göre duvara uzaklığı kaç santimetredir?

A) 200 B) 180 C) 120 D) 60 E) 40

12.

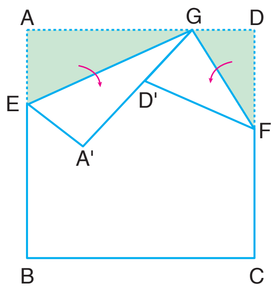


Yukarıdaki şekilde altındaki tahtaları birbirine paralel olan ve eşit aralıklarla dizilmiş tren rayında A ile B noktalarının arasına gerilen halat gösterilmiştir.

Buna göre $\dfrac{|AB|}{|BD|+|CD|}$ oranı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{5}{4}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{4}{5}$

13. ABCD karesi şeklindeki kâğıt A ve D köşelerinden şekildeki gibi katlanıyor. Katlamadan sonra G, D' ve A' noktaları doğrusal olmaktadır.



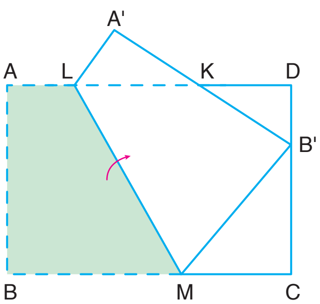
|AE| = (x + 8) cm, |GD| = (x – 1) cm

|AG| = 36 cm, |DF| = 18 cm

Yukarıda verilenlere göre |EB| kaç santimetredir?

A) 11 B) 21 C) 27 D) 35 E) 37

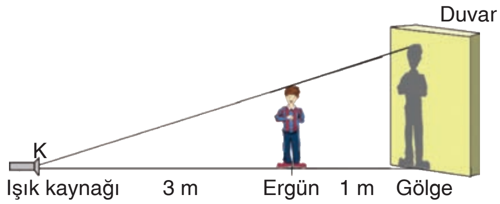
14. ABCD dikdörtgensel kâğıdı [LM] boyunca katlandığında B köşesi [DC] üzerine gelmektedir.



|AL| = 6 cm, |KB'| = 5 cm ve |AB| = 13 cm olduğuna göre |LD| kaç cm dir?

A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 15

15.

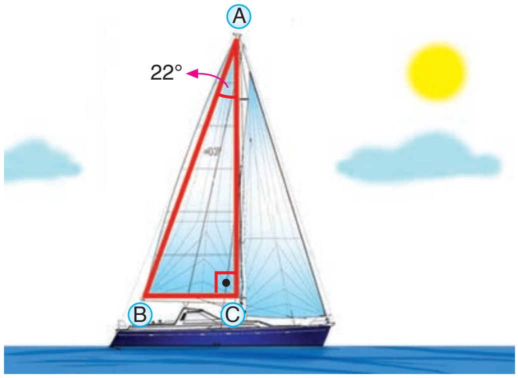


Yukarıdaki şekilde Ergün'ün duvara 1 m ve K noktasındaki ışık kaynağına 3 m uzaklıkta olduğunda gölge boyu 2 m dir.

Ergün ışık kaynağına 1 m yaklaştığında duvardaki gölgesi kaç m artar?

A) 0,75 B) 1 C) 1,5 D) 2 E) 3

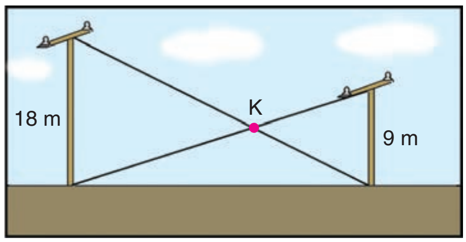
16.



Yukarıda verilen yelkenli resminde, yelkenlerden birisi ABC dik üçgenine model olmuştur. ABC üçgeninde $m(\widehat{ACB}) = 90°$, $m(\widehat{BAC}) = 22°$ ve |AC| = 20 m olduğuna göre, **|BC| yaklaşık kaç metredir?** *($\cot 22° \approx 2{,}5$ alınız.)*

A) 7 B) 7,5 C) 8 D) 9 E) 10

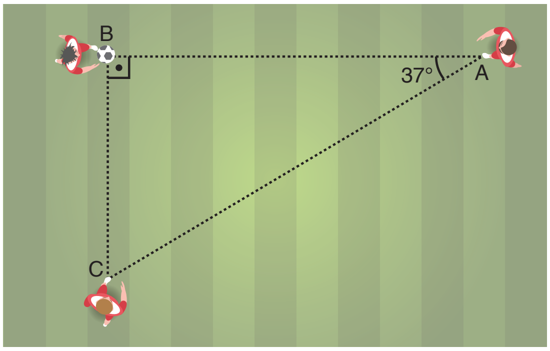
17.



Şekilde uzunlukları 18 m ve 9 m olan yer düzlemine dik iki elektrik direğinin birinin tepesinden diğerinin dibine gergin teller çekilmiştir. Tellerin kesişim noktası olan K noktasının yere olan uzaklığı kaç metredir?

A) 3 B) 4 C) 6 D) 7 E) 8

18.

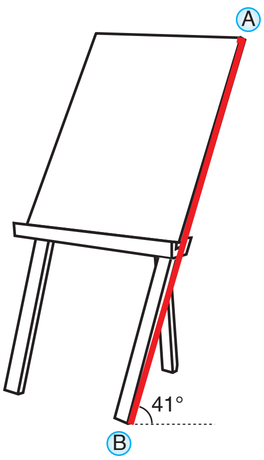


Yukarıdaki resimde üç futbolcunun antrenman sırasındaki konumları gösterilmiştir. Futbolcuların bulundukları noktalar ABC üçgenin köşeleri olup top ABC üçgeninin kenarları üzerinde hareket etmektedir.

$m(\widehat{ABC}) = 90°$, $m(\widehat{CAB}) = 37°$ ve B noktasındaki futbolcunun C noktasındaki futbolcuya attığı top 6 m yol aldığına göre, C noktasındaki futbolcunun A noktasındaki futbolcuya atacağı top yaklaşık kaç metre yol alır? *($\sin 37° \approx 0,6$ alınız.)*

A) 3 B) 5 C) 6 D) 8 E) 10

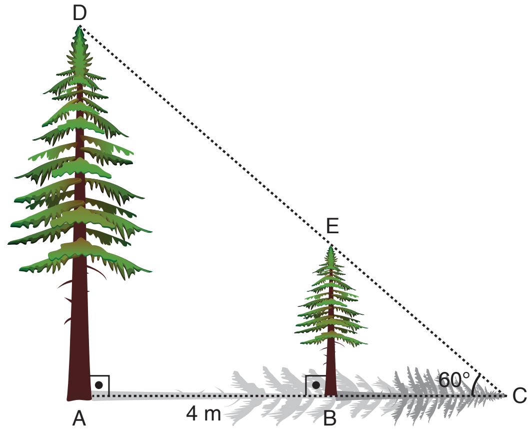
19.



Yukarıdaki resimde verilen ressam sehpasında, [AB] yer düzlemiyle 41° lik açı yapmaktadır. $|AB| = 130$ cm olduğuna göre, **A noktasının yerden yüksekliği yaklaşık kaç santimetredir?** *($\sin 41° \approx 0,65$ alınız.)*

A) 75,5 B) 80 C) 82,5 D) 84,5 E) 87,5

20.



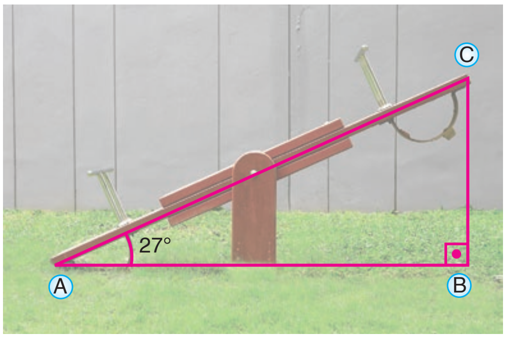
Yukarıdaki resimde verilen, aralarında 4 metre uzaklık bulunan A ve B noktalarındaki iki ağacın gölgeleri C noktasında son bulmuştur.

$m(\widehat{DAC}) = 90°$, $m(\widehat{EBC}) = 90°$ ve

$m(\widehat{DCA}) = 60°$ olduğuna göre, **büyük ağaç küçük ağaçtan kaç metre daha uzundur?**

A) 2 B) $2\sqrt{3}$ C) 4 D) $4\sqrt{3}$ E) 8

21.

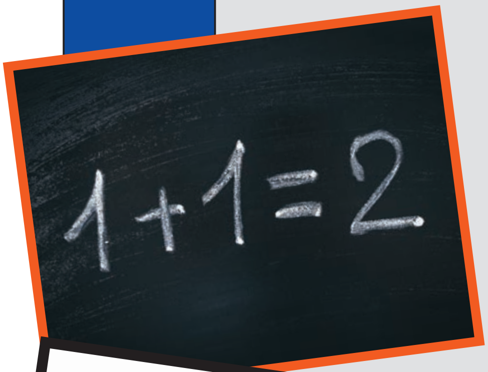


Yukarıdaki fotoğrafta verilen tahterevalli yer düzlemiyle 27° lik açı yapmaktadır. A ucu yere değen tahterevallide C ucunun yerden yüksekliği 70 cm dir. $m(\widehat{ABC}) = 90°$ ve $m(\widehat{BAC}) = 27°$ olduğuna göre, **|AB| yaklaşık kaç santimetredir?** *($\tan 27° \approx 0,5$ alınız.)*

A) 35 B) 45 C) 90 D) 100 E) 140

3. ALT ÖĞRENME ALANI

DENKLEM VE EŞİTSİZLİKLER









Bölümler

Günlük hayatımızda, satın aldığımız bir ürünün birim fiyatını hesaplarken, seyahat esnasında kalan yolumuzu ya da varış süresini hesaplarken, spor yaparken yaktığımız kalori hesabı gibi birçok alanda matematiksel işlemler yapmayı gerektiren problemlerle karşılaşırız.

Bazı tüketim kalemlerinin yok olması insanlar için sakıncalı durumlar ortaya çıkarır. Bu durumlardan korunmak ancak bilinçli tüketici olmayı gerektirecek davranışların kazanılmasıyla mümkün olacaktır.

Bu ünitede, günlük hayatımızda karşılaşacağımız birçok problemi çözmeyi ve bilinçli bir tüketici olmak için gerekli bazı bilgileri öğreneceğiz.

Hazır mısınız?

Bölüm 3.1 için Hazırlık Soruları

1. Aşağıdaki birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

a. $3x + 4 = 6 + 3x$

b. $9 + 3x = 4x + 9$

c. $3x + 4(x - 5) = 5x + 8$

d. $3(x + 2) = 3x + 2$

e. $5x + 4(x - 1) = 3x + 1 + x$

f. $2(x - 6) = -10 + 2(x - 1)$

2. -2 sayısının aşağıda verilen denklemlerden herhangi birinin bir kökü olup olmadığını belirleyiniz.

a. $5 - x = 7$

b. $-8 - x = 10$

c. $12 = -3x + 6$

d. $2x - 3 = x - 5$

3. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

a. $\frac{3}{x+1} - \frac{4}{5} = \frac{1}{x+1} - 6$

b. $\frac{3}{x-1} + \frac{4}{x+1} = \frac{8}{x+1}$

c. $\frac{2x+1}{5} + \frac{x-4}{6} = \frac{2}{3}$

d. $\frac{1}{2x+1} - \frac{3}{4} = \frac{7}{2x+1}$

4. Aşağıda verilen ilk sütundaki birinci dereceden iki bilinmeyenli denklemleri (doğrusal denklemleri) sağlayan noktaları ikinci sütundan bulup eşleştiriniz.

a. $y = 2x + 3$	**I.** $(-1, 6)$
b. $y = 3x - 4$	**II.** $(2, 6)$
c. $-3x + y = 9$	**III.** $(1, 5)$
d. $y - x = 4$	**IV.** $(3, 3)$
e. $2 = 3x - y$	**V.** $(2, 2)$
f. $-3x + y = 8$	**VI.** $(2, 1)$
g. $9 = 5x - y$	**VII.** $(-3, -1)$
	VIII. $(1, 1)$

5. $x = -6$ sayısının aşağıda verilen eşitsizliklerden hangilerinin çözüm aralığında yer aldığını bulunuz.

a. $2x - 4 \leq -1$ **b.** $\frac{x}{2} - 5 < -6$

c. $1 - 2x \geq 5 - x$ **d.** $\frac{3x}{6} + \frac{4}{x} > x$

6. Aşağıdaki birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizliklerde boş bırakılan yerlere $<$, $>$, $\leq$ ya da $\geq$ sembollerinden uygun olanını yazınız.

a. $-4x \geq 12$ ise x ... -3 tür.

b. $x > -5$ ise $4x$ ... -20 dir.

c. $x > y$ ve $z < 0$ ise $-xz$ ... $-yz$ dir.

d. $p > 0$ ve $q < 0$ ise $p - q$ ... p dir.

e. $-2x + 1 \geq 9$ ise x ... -4 tür.

f. $-5 < x + 2 < 5$ ise x ... -7 ve x ... 3 tür.

BÖLÜM 3.1

BİRİNCİ DERECEDEN DENKLEM VE EŞİTSİZLİKLER

Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler

Neleri Öğreneceğiz?

- Birinci dereceden bir veya iki bilinmeyenli denklemlerle ilgili problemleri çözebilmeyi,
- Birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizliklerle ilgili problemleri çözebilmeyi.

Günlük Hayat Bağlantısı

Havaalanlarından yolcu transferi yapan iki şirketin fiyat tarifeleri aşağıdaki gibidir.

- A şirketi: Araca binilmesiyle birlikte ödeme ekranında yazan 50 TL ye ek olarak, gidilen her kilometre için yolcudan 1,5 TL alınmaktadır.

Şekil 3.1.1



- B şirketi: Sadece gidilen yolun her kilometresi için yolcudan 3,5 TL alınmaktadır.

Bu şirketlerden hangisinin hangi koşulda daha ekonomik olacağına nasıl karar verirdiniz? *(83. sayfadaki "3. Örnek"e bakınız.)*

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ için $ax + b = 0$ denklemi x değişkenine bağlı birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemdir. Denklemdeki a ve b ye denklemin katsayıları, x e de bilinmeyen adı verilir. Bilinmeyenin üssü denklemin derecesidir.

Denklemi sağlayan x değerini bulmaya denklem çözme, denklemi sağlayan x gerçek sayısına denklemin kökü ve denklemin kökünden oluşan kümeye de çözüm kümesi denir.

$ax + b = 0$ denkleminde;

- *$a \neq 0$ ise denklemin kökü $x = -\frac{b}{a}$ olup çözüm kümesi bir elemanlıdır. $Ç.K = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$*
- *$a = 0$ ve $b = 0$ ise denklemin çözüm kümesi sonsuz elemanlıdır. ($Ç.K = \mathbb{R}$)*
- *$a = 0$ ve $b \neq 0$ ise denklemin çözüm kümesi boş kümedir. ($Ç.K = \varnothing$)*

Tarih Kutusu

Matematik, gökbilim ve coğrafya alanlarında çalışmış ünlü bir Fars bilginidir. Matematik alanındaki çalışmaları cebirin temelini oluşturmuş olan Harezmî "El'Kitab'ül-Muhtasar fi Hısab'il Cebri ve'l-Mukabele" (Cebir ve Denklem Hesabı Üzerine Özet Kitap) adlı eserinde cebir kelimesini ilk kez kullanmıştır. Harezmî'nin doğu ve batının ilk müstakil cebir kitabı olma özelliğini taşıyan bu kitabında, matematik tarihinde birinci ve ikinci dereceden denklemlerin sistematik çözümleri yer almıştır. Bu nedenle Harezmî (Diophantus ile birlikte) "cebirin babası" olarak da bilinir. İngilizce'deki "algebra" ve bunun Türkçe'deki karşılığı olan "cebir" sözcüğü, Harezmî'nin kitabındaki ikinci dereceden denklemleri çözme yöntemlerinden biri olan "el–cebr" den gelmektedir.

El Harezmî



(780 – 850)

Kaynak: http://matematik.dpu.edu.tr/index/sayfa/3119/el-harezmi

1. Örnek

1 ton kâğıdın geri dönüşümü ile 4100 kilovat/saat enerji tüketimi engellenmektedir.

1 ton plastiğin geri dönüşümüyle elde edilen enerji tasarrufunun 2 katı, kâğıttan elde edilen tasarrufun 100 kilovat/saat eksiğinin 7 katına eşittir.

Buna göre 1 ton plastiğin geri dönüşümüyle ne kadar enerji tasarrufu sağlandığını bulalım.

Şekil 3.1.2



Çözüm

Problemle birlikte verilen bilgileri içeren matematik cümlesini yazalım. 1 ton plastiğin geri dönüşümüyle elde edilen enerji tasarrufu x kilovat/saat olsun.

Buna göre $2x = 7.(4100 - 100)$ denklemi yazılır.

Bu denklem, derecesi 1 olup tek değişken (x) içerdiğinden, birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem olarak adlandırılır.

Şimdi $2x = 7.(4100 - 100)$ denklemini çözerek 1 ton plastiğin geri dönüşümüyle elde edilecek enerji tasarrufunu bulalım.

$$2x = 7.(4100 - 100)$$
$$2x = 7.(4000)$$
$$2x = 28000$$
$$x = 14000 \text{ kilovat/saat bulunur.}$$

Bunları Biliyor musunuz?



Evlerde ya da işyerlerinde kullanılan her bir litre atık yağın lavaboya ya da çöpe dökülmesi sonucunda 1 milyon litre kullanılabilir temiz su kaynağının kirlenmesine neden olduğunu biliyor muydunuz?

Son on yılda yaygınlaşmaya başlayan atık yağ toplama ve işleme şirketleri topladıkları atık yağların yağlı boya, sanayide kullanılan sabun ve biyodizele dönüşümlerini sağlayarak hem doğaya hem de ülke ekonomisine katkıda bulunmaktadır.

2. Örnek

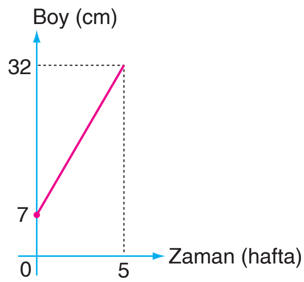
7 cm boyunda iken dikilen bir fidanın boyunun, boyu 32 cm uzunluğa ulaşıncaya kadar geçen hafta türünden zamana bağlı değişimi "Şekil 3.1.4" te gösterilmiştir.

Buna göre fidanın boyunun zamana göre değişimini veren denklemi yazıp 72 cm uzunluğa kaçıncı haftada ulaşacağını bulalım.

Şekil 3.1.3



Şekil 3.1.4



Çözüm

Fidanın dikildiğinde boyu 7 cm ve 5 haftalık süre sonundaki boyu 32 cm ise fidan 5 haftada $32 - 7 = 25$ cm uzamıştır. Buna göre haftalık uzama miktarı
$25 : 5 = 5$ cm dir.

Dikilen fidanın cm türünden boyu B, geçen zaman da x hafta olsun. Buna göre x hafta sonra fidanın boyu $B = 7 + 5x$ cm olur.

$B = 72$ için
$B = 7 + 5x \Rightarrow 72 = 7 + 5x \Rightarrow 65 = 5x \Rightarrow x = 13$ hafta bulunur.

3. Örnek

Konunun girişinde bahsedilen şirketlerden hangisinin hangi koşulda daha ekonomik olacağını inceleyelim.

Çözüm

İki şirketin de x kilometrelik yolculuk sonrasında yolcularından alacağı ücreti yazalım.

A şirketinin alacağı ücret: $50 + 1,5 . x$
B şirketinin alacağı ücret: $3,5 . x$ tir.

Bu cebirsel ifadeleri eşitleyerek ödenecek ücretin kaçıncı kilometrede eşitleneceğini bulalım.

$50 + 1,5 . x = 3,5 . x \Rightarrow 50 = 2x \Rightarrow x = 25$ km bulunur.

Buradan, havaalanına mesafesi 25 km den daha kısa yolculuklar için B şirketini, daha uzun yolculuklar için de A şirketini kullanmanın daha ekonomik olacağı bulunur.

4. Örnek

İki İnternet operatöründen birincisi, aylık 10 TL sabit ücret ve bağlantının her saati için 2 TL ücret almaktadır. İkincisi, aylık 30 TL sabit ücret ve bağlantının her saati için 1 TL ücret almaktadır.

Bir ayda kaç saatlik İnternet bağlantısı için iki operatörün de alacağı ücretin aynı olacağını bulalım.

Çözüm

"Şekil 3.1.5" teki tablo problemde verilenleri içermektedir.

Şekil 3.1.5

Operatör	Sabit Ücret (TL)	1 Saatlik Kullanım Bedeli (TL)
I	10	2
II	30	1

İki operatörün İnternet kullanımı için alacağı ücret x saat sonra aynı olsun.

İki operatörün de x saat sonra İnternet kullanımı için alacağı ücreti x cinsinden bulup bu cebirsel ifadeleri eşitleyerek x değerini bulalım.

x saatlik İnternet kullanımı için;
I. operatör $(10 + 2x)$ TL, II. operatör $(30 + x)$ TL ücret alır.

O hâlde $10 + 2x = 30 + x \Rightarrow x = 20$ saat bulunur.

5. Örnek

Bir sınıftaki öğrenciler sıralara ikişerli otururlarsa 6 kişi ayakta kalıyor. Öğrenciler sıralara üçerli otururlarsa da 2 sıra boş kalıyor.

Buna göre sınıf mevcudunu bulalım.

Çözüm

Sınıftaki sıra sayısı x olsun. Öğrenciler sıralara ikişerli oturduklarında 6 kişi ayakta kalıyorsa sınıf mevcudu,

$2x + 6$ **...(I)** olur.

Öğrenciler sıralara üçerli oturduklarında 2 sıra boş kalıyorsa sınıf mevcudu,

$3(x - 2)$ **...(II)** olur.

I ve **II** nin eşitliğinden,

$2x + 6 = 3(x - 2) \Rightarrow 2x + 6 = 3x - 6 \Rightarrow x = 12$ bulunur.

Bu durumda sınıf mevcudu,

$2x + 6 = 2.12 + 6 = 30$ bulunur.

6 Örnek

4 yanlışın 1 doğruyu götürdüğü 40 sorudan oluşan bir deneme sınavında, öğrencilere yapmış oldukları her bir net için 6 puan verilmektedir.

Tüm soruları cevaplayan bir öğrenci deneme sınavından 180 puan aldığına göre bu öğrencinin kaç soruyu doğru cevapladığını bulalım.

Çözüm

Öğrencinin doğru cevapladığı soru sayısı x ise yanlış cevapladığı soru sayısı, $40 - x$ olur.

4 yanlış bir doğruyu götüreceğinden net sayısı, doğru sayısından yanlış sayısının dörtte birinin çıkarılmasıyla bulunur.

Bu durumda net sayısı $x - \frac{40 - x}{4}$ tür.

Her bir net 6 puan olup bu öğrenci toplam 180 puan aldığına göre,

$$\left(x - \frac{40 - x}{4}\right).6 = 180 \Rightarrow x - \frac{40 - x}{4} = 30$$

$$\Rightarrow \frac{4x - 40 + x}{4} = 30$$

$$\Rightarrow 5x - 40 = 120$$

$$\Rightarrow x = 32 \text{ bulunur.}$$

- *a, b, d ve e den en az üçü sıfırdan farklı ve a, b, c, d, e, f $\in \mathbb{R}$ olmak üzere,* $\left.\begin{matrix} ax + b.y = c \\ d.x + e.y = f \end{matrix}\right\}$ *sistemi birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemidir.*

- *Birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sisteminin çözüm kümesi, sistemdeki her iki denklemi de doğru yapan x ve y bilinmeyenlerinin değerlerinin oluşturduğu sıralı ikilileri içerir ve Ç = {(x, y)} şeklinde gösterilir.*

7. Örnek

A ve B gibi iki şirketin 75 000 TL değerindeki araca ihtiyaçları olsun. A şirketi aracı peşin olarak satın almış, B şirketi ise aracı günlük 150 TL ye kiralamıştır.

Buna göre günlük 50 TL yakıt masrafı olan iki şirket kaç gün sonunda toplamda aynı parayı ödemiş olurlar?



Şekil 3.1.6

Çözüm

Şirketlerin kasalarından çıkan toplam para y, geçen gün sayısı da x olsun. A şirketi 75 000 TL nin yanı sıra geçen gün sayısı kadar da yakıt için 50 TL ödeyecektir.

Bu durum $y = 75\,000 + 50x$ **...(I)** ile ifade edilebilir.

B şirketi ise geçen gün sayısı kadar 150 TL kira ve 50 TL yakıt masrafı ödeyecektir.

Bu durum $y = 200x$ **...(II)** ile ifade edilebilir.

I ve **II** denklemleri ile oluşan $\left.\begin{matrix} y = 75\,000 + 50x \\ y = 200x \end{matrix}\right\}$ sistemi birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemidir. Bu sistemi yerine koyma metodu ile çözelim.

İkinci denklemde y nin eşiti olan 200x i birinci denklemdeki y yerine yazalım. Oluşan birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemden,

$200x = 75\,000 + 50x$

$150x = 75\,000$

$x = 500$ bulunur.

Buna göre A ve B şirketlerinin kasalarından 500 gün sonrasında eşit miktarda para çıkmış olacaktır.

8. Örnek

Şekil 3.1.7



3 kalem ve 2 silgi alındığında ödenen para 8 TL, 2 kalem ve 3 silgi alındığında da ödenen para 7 TL dir.

Buna göre silgi ve kalemin fiyatlarının ne kadar olduğunu bulalım.

Çözüm

Bir kalemin fiyatına x, bir silginin fiyatına da y diyelim. 3 kalem ve 2 silgi alındığında ödenen para 8 TL ise $3x + 2y = 8$ **...(I)** denklemini, 2 kalem ve 3 silgi alındığında ödenen para 7 TL ise $2x + 3y = 7$ **...(II)** denklemini yazabiliriz. Bu birinci dereceden iki bilinmeyenli iki denklemin oluşturduğu

$$\left.\begin{aligned} 3x+2y&=8 \\ 2x+3y&=7 \end{aligned}\right\}$$ sisteminin çözümünü yok etme yöntemini kullanarak bulalım.

$$\left.\begin{aligned} 3x+2y&=8 \\ 2x+3y&=7 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2\,/\,3x+2y&=8 \\ -3\,/\,2x+3y&=7 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \cancel{6x}+4y&=16 \\ +\quad -\cancel{6x}-9y&=-21 \end{aligned}\right\}$$

$$-5y=-5 \Rightarrow y=1 \text{ dir.}$$

$y = 1$ için $3x + 2y = 8 \Rightarrow 3x + 2.1 = 8 \Rightarrow x = 2$ dir.

O hâlde bir kalemin fiyatı 2 TL, bir silginin fiyatı da 1 TL bulunur.

9. Örnek

Şekil 3.1.8



Bir çiçekçiden 1 kırmızı ve 1 beyaz gül alındığında 12 TL ödeniyor. 3 kırmızı gül alan bir kişi, 2 beyaz gül alan birinden 1 TL fazla para ödüyor.

Buna göre bir kırmızı ve bir beyaz gülün fiyatlarını bulalım.

Çözüm

Bir kırmızı gülün fiyatına x, bir beyaz gülün fiyatına da y diyelim.

1 kırmızı ve 1 beyaz gül alındığında ödenen para 12 TL ise $x + y = 12$ **...(I)** denklemini,

3 kırmızı gül alan kişi 2 beyaz gül alan kişiden 1 TL fazla ödüyorsa $3x - 2y = 1$ **...(II)** denklemini yazabiliriz.

Bu birinci dereceden iki bilinmeyenli iki denklemin oluşturduğu

$$\left.\begin{aligned} x+y&=12 \\ 3x-2y&=1 \end{aligned}\right\}$$ sisteminin çözümünü yerine koyma yöntemini kullanarak yapalım.

I. denklemde x i yalnız bırakalım ve **II.** denklemdeki x yerine koyalım.

$x + y = 12 \Rightarrow x = 12 - y$ dir.

$3x - 2y = 1 \Rightarrow 3(12 - y) - 2y = 1 \Rightarrow 36 - 5y = 1 \Rightarrow 35 = 5y \Rightarrow y = 7$ dir.

$y = 7$ için $x + y = 12 \Rightarrow x + 7 = 12 \Rightarrow x = 5$ tir.

O hâlde bir kırmızı gülün fiyatı 5 TL, bir beyaz gülün fiyatı da 7 TL bulunur.

1. Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. Geri dönüştürülebilir maddelerin doğaya katkıda bulunduklarını biliyoruz. Örneğin 1 ton kâğıdın geri dönüşümü sonucunda 36 ton karbondioksit gazının oluşumu engellenmiş olur. 1 ton plastiğin geri dönüşümünde, oluşumu engellenecek karbondioksit miktarının 1 ton fazlasının 16 katı, 1 ton kâğıdın geri dönüşümü sonucunda oluşumu engellenen karbondioksit miktarının 4 ton fazlasına eşittir.

Buna göre geri dönüştürülen 1 ton plastik ile oluşumu engellenecek karbondioksit miktarı kaç tondur?

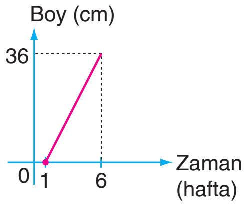
Şekil 3.1.9



2. Tohum hâlinde ekilip bir hafta sonra filizlenen bir fidan, 9 hafta sonra 36 cm boyuna ulaşmaktadır. Bu fidanın cm türünden boyunun, hafta türünden zamana göre değişimi "Şekil 3.1.10" da verilmiştir.

Buna göre fidan 72 cm uzunluğa ekildikten kaç hafta sonra ulaşır?

Şekil 3.1.10



Şekil 3.1.11



3. Bir şehirdeki taksi ücreti tarifesine göre taksi ücreti (T TL) ile gidilen toplam yolu (x km) ilişkilendiren denklem,
$T = 3{,}2 + 1{,}8 \cdot x$ tir.

a. Bu şehirde taksiye binen bir kişi gideceği 20 km lik bir yol için kaç TL öder?
b. Verilen denklemi x değişkenini verecek şekilde yeniden düzenleyiniz.
c. Bu şehirde taksiye binen bir kişi taksi ücreti olarak 12,20 TL ödediğine göre kaç km seyahat etmiştir?

4. A ve B araçlarının depolarında sırasıyla 60 L ve 45 L benzin vardır. 100 km/sa. sabit hızla gittiklerinde A aracı saatte 10 L, B aracı ise saatte 5 L benzin tüketmektedir.

A ve B araçları aynı anda harekete başlayıp 100 km/sa. sabit hızla giderlerse kaç saat sonra depolarında kalan benzin miktarları eşit olur?

5. Bir okulun her sınıfında 36 öğrenci vardır. Sınıflardaki öğrenci sayıları ikişer azaltılırsa sınıf sayısı 12 artıyor. Okulda kaç öğrenci vardır?

6. 70 soruluk bir testte 7 yanlışın 2 doğruyu götürdüğü ve her bir netin 6 puan olduğu bilinmektedir. Bu testten 5 soru boş bırakarak 282 puan alan bir öğrencinin doğru cevapladığı soru sayısının yanlış cevapladığı soru sayısına oranı nedir?

7. İki aile seyahatlerinde kiralık araba kullanmak istemektedir. Birinci aile kiraladığı araba için 100 TL sabit, gidilen her kilometre için de 10 Kr ücret ödeyecektir. İkinci aile ise 50 TL sabit, gidilen her kilometre için de 20 Kr ücret ödeyecektir.

Bu iki ailenin seyahatlerinin kaçıncı kilometresinde ceplerinden çıkan tutarın aynı olacağını bulunuz.

Şekil 3.1.12



8. 5 kalem ve 2 kalemtıraş alındığında ödenen para 10 TL, 4 kalem ve 4 kalemtıraş alındığında da ödenen para 11 TL olduğuna göre kalemtıraş ve kalemin ne kadar olduğunu bulunuz.

9. 1 kg portakal ve 3 kg elma alındığında 11,50 TL; 1 kg elma ve 3 kg portakal alındığında da 12,50 TL ödenmektedir. Buna göre elma ve portakalın kg fiyatlarının kaçar TL olduğunu bulunuz.

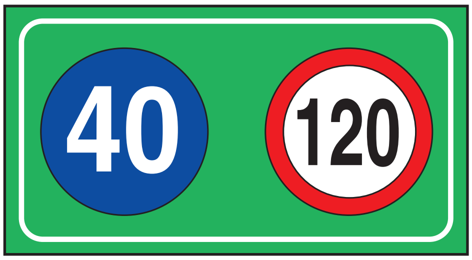
Şekil 3.1.13



Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlikler

Trafik akımını hızlı bir şekilde sağlamak için yapılan, çok şeritli otoyolların dünyadaki ilk örneği 1924 yılında İtalya'da yapılmıştır. Ülkemizde yapılan ilk otoyolun hizmete başlama yılı ise 1973 tür. Trafik akışının hızlı sağlanması istense de bu yollarda belirli hız sınırları mevcuttur. "Şekil 3.1.14" teki fotoğraf otoyolu kullanacak araçların saatte 40 km den daha az ve saatte 120 km den daha çok hız yapmalarının yasak olduğunu göstermektedir. Sizce bir aracın saattaki hızı V olduğunda bu hız sınırlarını matematiksel olarak nasıl ifade edebilirsiniz?

Şekil 3.1.14



- *Bir niceliğin başka bir nicelikten büyük veya küçük olma durumunu belirten ifadelere eşitsizlik adı verilir. Eşitsizliklerin ifade edilmesinde "$>, \geq, <, \leq$" sembolleri kullanılır. $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere, $ax + b > 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b < 0$ ve $ax + b \leq 0$ şeklinde ifade edilen eşitsizliklere birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlikler denir.*
- *Bir eşitsizlikte değişkenin bazı değerleri için eşitsizlik sağlanırken bazı değerleri için sağlanmayabilir. Eşitsizliği sağlayan sayıların kümesi eşitsizliğin çözüm kümesidir.*

10. Örnek

Kumbarasında 90 TL parası olan Ali, biriken parası 300 TL den fazla olduğunda tüm parasını ihtiyaç sahiplerine ulaştırılması için bir yardımlaşma kurumuna bağışlayacaktır. Ali kumbaraya her gün 7 TL para attığına göre Ali'nin bu bağışı en az kaç gün sonra gerçekleştirebileceğini bulalım.

Şekil 3.1.15



Çözüm

Ali'nin kumbarasında biriken para, x gün olmak üzere $90 + 7x$ tir. Bu paranın 300 TL den fazla olmasını $90 + 7x > 300$ eşitsizliği ile ifade edebiliriz. Bu eşitsizliği çözelim:

$90 + 7x > 300 \Rightarrow 90 + 7x - 90 > 300 - 90$ *(her taraftan 90 çıkardık.)*

$\Rightarrow \frac{7x}{7} > \frac{210}{7}$ *(her iki tarafı 7 ile böldük.)*

$\Rightarrow x > 30$ dur.

O hâlde Ali düşündüğü bağışı en erken 31 gün sonra gerçekleştirebilecektir.

11. Örnek

400 km lik bir yolu saatte x km hızla alacak olan bir aracın 2 saat sonra kalan yolu, aldığı yolun 3 katından fazla olmaktadır. Buna göre x in tam sayı olarak alabileceği en büyük değerin saatte kaç kilometre olduğunu bulalım.

Şekil 3.1.16



Çözüm

Saatte x km hızla yol alan bir aracın iki saatte alacağı yol 2x km olup kalan yolu da $(400 - 2x)$ km dir. 2 saat sonunda aracın kalan yolu, aldığı yolun 3 katından fazla olduğundan, $400 - 2x > 3.2x$ eşitsizliğini yazabiliriz.

$400 - 2x > 3.2x \Rightarrow 400 - 2x + 2x > 6x + 2x$ *(her tarafa 2x ekledik.)*

$\Rightarrow \frac{400}{8} > \frac{8x}{8}$ *(her iki tarafı 8 ile böldük.)*

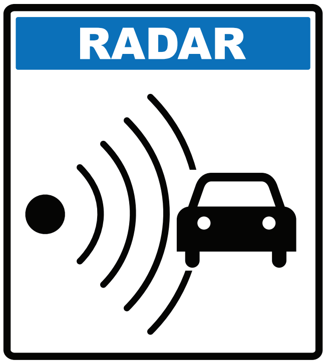
$\Rightarrow 50 > x$ tir.

O hâlde aracın hızı olan x in en büyük tam sayı değeri saatte 49 km bulunur.

12. Örnek

Konunun girişinde bahsettiğimiz otoyoldaki hız sınırlarının ülkemizde %10 ile %30 arasında aşılması, %30 ile %50 arasında aşılması ya da %50 ve daha fazla aşılması şeklinde üç kademeli ceza uygulaması yapılmaktadır. Hız sınırlarını ilk kademeden ihlal eden bir sürücünün radara yakalandığı saatteki hızının hangi kilometreler arasında olduğunu eşitsizlik kullanarak gösterelim.

Şekil 3.1.17



Çözüm

Hız sınırının üst limiti saatte 120 km olup bunun %10 u, $120 \cdot \frac{10}{100} = 12\,\text{km}$, %30 u ise $120 \cdot \frac{30}{100} = 36\,\text{km}$ dir. Bu durumda hızı $120 + 12 = 132$ km ile $120 + 36 = 156$ km arasındadır.

Aracın hızı saatte x km olarak kabul edilirse aracın radara yakalandığı hız, $132 < x < 156$ eşitsizliği ile gösterilebilir.

13. Örnek

Obezite, vücutta kilo alımıyla biriken yağların ortaya çıkardığı bir hastalık olarak görülmektedir. Son yıllarda sağlık bakanlığı da obeziteyle yüksek derecede mücadele etmeye başlamıştır.

Şekil 3.1.18



İdeal vücut ağırlığı vücut kitle indeksi hesaplanarak bulunur. Vücut kitle indeksi, kg türünden vücut ağırlığının metre türünden boy uzunluğunun karesine bölünmesiyle bulunur. "Şekil 3.1.19" da vücut kitle indekslerinin aralıkları verilmiştir.

Şekil 3.1.19

Yetişkinler için	Kadın	Erkek
Aşırı zayıf, yüksek risk	17,5 ve daha az	
Zayıf	17,5 – 19,1	17,5 – 20,7
Normal aralık (ideal kilo)	19,1 – 25,8	20,7 – 26,4
Biraz kilo fazlası	25,8 – 27,3	26,4 – 27,8
Fazla kilo	27,3 – 32,3	27,8 – 31,1
Çok fazla kilolu	32,3 – 34,9	31,1 – 34,9
Sağlık açısından yüksek risk	35 – 40	
Hastalıklı şekilde aşırı kilolu	40 – 50	
Süper aşırı kilolu	50 – 60 kg/m^2	

Buna göre

a. **İdeal vücut kitle indeksine sahip yetişkin bir erkeğin boyu 1,8 m olduğuna göre kilosunun alabileceği en büyük ve en küçük tam sayı değerlerini bulalım.**

b. **1,6 m boyundaki yetişkin bir kadının kilosu 44 kg dır. Yüksek risk içerecek şekilde zayıf olan bu kadının tam sayı olarak en az kaç kilo alması durumunda normal aralıkta vücut kitle indeksine sahip olacağını bulalım.**

Çözüm

a. Vücut kitle indeksine V diyelim. "Şekil 3.1.19"a göre ideal vücut kitle indeksi, yetişkin bir erkek için $20,7 < V < 26,4$ aralığında olmalıdır.

Vücut ağırlığı kilogram türünden x, boy da metre türünden y kabul edilirse $V = \frac{x}{y^2}$ olur. V nin bu ifadesini eşitsizlikte yerine koyalım:

$$20,7 < V < 26,4 \Rightarrow 20,7 < \frac{x}{y^2} < 26,4$$

$$\Rightarrow 20,7 < \frac{x}{(1,8)^2} < 26,4 \quad (y = 1,8 \text{ m})$$

$$\Rightarrow 20,7 < \frac{x}{3,24} < 26,4$$

$$\Rightarrow 3,24 . 20,7 < 3,24 . \frac{x}{3,24} < 3,24 . 26,4 \quad \textit{(eşitsizliğin her tarafı 3,24 ile çarpıldı.)}$$

$$\Rightarrow 67,068 < x < 85,536 \text{ bulunur.}$$

Buna göre ideal bir vücut kitle indeksine sahip 1,8 metre boyundaki yetişkin bir erkeğin kilosu tam sayı olarak en az 68 kg en çok da 85 kg olmalıdır.

b. Yetişkin bir kadının $19,1 < V < 25,8$ aralığındaki ideal vücut kitle indeksine sahip olması için alması gereken kiloya x diyelim. Buna göre,

$$19,1 < V < 25,8 \Rightarrow 19,1 < \frac{44 + x}{y^2} < 25,8 \quad (y = 1,6 \text{ m})$$

$$\Rightarrow 19,1 < \frac{44 + x}{(1,6)^2} < 25,8$$

$$\Rightarrow 2,56 . 19,1 < 44 + x < 2,56 . 25,8 \quad \textit{(eşitsizliğin her tarafı 2,56 ile çarpıldı.)}$$

$$\Rightarrow 48,896 < 44 + x < 66,048$$

$$\Rightarrow 48,896 - 44 < 44 + x - 44 < 66,048 \quad \textit{(eşitsizliğin her tarafından 44 çıkarıldı.)}$$

$$\Rightarrow 4,896 < x < 22,048 \text{ aralığında olmalıdır.}$$

O hâlde, yetişkin bu kadının alması gereken kilonun tam sayı değerinin en az 5 kg olduğu bulunur.

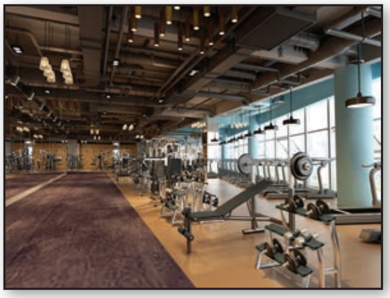
2. Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. Fatih Bey'in görüştüğü iki spor salonundan aldığı fiyatlar şu şekildedir.

- A Salonu: Başlangıçta ödenen 400 TL nin yanında her girişte 50 TL ücret almaktadır.
- B Salonu: Başlangıçta ödenen 500 TL nin yanında her girişte 40 TL ücret almaktadır.

Buna göre B salonunun fiyatı en erken kaçıncı girişten sonra A salonuna göre daha ucuz olacaktır?

Şekil 3.1.20



2. Deniz besledikleri tavukların kümesinden her gün 20 yumurta toplamaktadır. 48 yumurta bulunan evlerinde günde x yumurta yenilen Denizlerin 4 gün sonra biriken yumurtalarının sayısı, bu süre içinde yenilen yumurtaların sayısının en az 3 katı olacağına göre x in en küçük değeri kaçtır?

Şekil 3.1.21



3. Hesabında 4500 TL parası olan Bilge, her ay hesabına 300 TL para yatırarak 11500 TL tutarındaki koltuk takımını almak istemektedir. Bu durumda Bilge'nin koltuk takımını en erken kaçıncı ayda alabileceğini bulunuz.

4. Bir şehirdeki taksi ücreti tarifesine göre açılış ücreti 4,5 TL ve km başına alınan ücret 3,5 TL dir. Buna göre 210 TL karşılığında taksi ile tam sayı olarak en çok kaç km seyahat edilebilir?

Şekil 3.1.22



5. Günlük Hayat Bağlantısı

Ülkemizde hız sınırları %10 fazlasına kadar (%10 u dâhil değil) aşıldığında herhangi bir cezai uygulama yapılmamaktadır. Kurallara ve kanunlara uymanın bir vatandaşlık görevi olduğunun bilincindeki bir sürücünün kullandığı araç "Şekil 3.1.23" teki fotoğrafta gösterilen 70 km/sa. lik hız sınırına göre saatte x km hızla hareket etmektedir. Buna göre aracın hızı hangi aralıkta olursa sürücü herhangi bir cezayla karşı karşıya gelmez?

Şekil 3.1.23



6. Günlük Hayat Bağlantısı

Vücut kitle indeksinin kg türünden vücut ağırlığının, metre türünden boy uzunluğunun karesine bölünmesiyle bulunduğunu görmüştük. "Şekil 3.1.24" teki tabloda vücut kitle indekslerinin aralıkları verilmiştir. Buna göre,

a. Boyu 2 metre olup kilosu 110 kg olan eski bir erkek basketbol oyuncusunun vücut kitle indeksinin hangi aralıkta olduğunu bulunuz.

b. Boyu 1,7 m olup kilosu 80 kg olan bir kadının vücut kitle indeksinin bir kademe iyileşmesi için tam sayı olarak en az kaç kg kilo vermesi gerektiğini bulunuz.

Şekil 3.1.24

Yetişkinler için	Kadın	Erkek
Aşırı zayıf, yüksek risk	17, 5 ve daha az	
Zayıf	17,5 – 19,1	17,5 – 20,7
Normal aralık (ideal kilo)	19,1 – 25,8	20,7 – 26,4
Biraz kilo fazlası	25,8 – 27,3	26,4 – 27,8
Fazla kilo	27,3 – 32,3	27,8 – 31,1
Çok fazla kilolu	32,3 – 34,9	31,1 – 34,9
Sağlık açısından yüksek risk	35 – 40	
Hastalıklı şekilde aşırı kilolu	40 – 50	
Süper aşırı kilolu	50 – 60 kg/m^2	

7. Günlük Hayat Bağlantısı

Dini bayramlarımızda küçüklerin, büyüklerin ellerini öperek saygı; büyüklerin de küçüklere hediyeler vererek sevgi göstermesi önemli geleneklerimiz arasında yer almaktadır.

Şekil 3.1.25



Bayramda şehir dışındaki aile büyüklerini ziyaret etmek isteyen iki komşu aile, yolculukları için kiralık arabalar kullanacaklardır. Bu iki aileden birincisi kiraladığı araba için 150 TL sabit, gidilen her kilometre için de 40 kr. ücret ödeyecek, ikinci aile ise 200 TL sabit, gidilen her kilometre için de 25 kr. ücret ödeyecektir.

Bu aileler tam sayı olarak en az kaç km yol aldığında ikinci ailenin ödeyeceği kiralama bedeli birinci aileden daha düşük olur?

1. Aşağıdaki problemlerin çözümlerini bulunuz.

a. Toplamları 27 olan iki sayıdan birinin dörtte biri, diğerinin $\frac{5}{16}$ ine eşittir. Buna göre bu sayılardan büyük olanı kaçtır?

b. Ali parasının $\frac{3}{5}$ ünü harcadığında geriye 30 TL si kalıyor. Buna göre Ali'nin harcamadan önceki parası kaç TL dir?

c. $\frac{1}{3}$ i su ile dolu olan bir bidona 20 litre daha su konulursa bidonun $\frac{3}{4}$ ü dolmaktadır. Buna göre bidonun tamamı kaç litre su alır?

d. Bir top kumaşın dörtte biri satıldıktan sonra 15 metresi daha satılırsa kumaşın dörtte biri kalmış oluyor. Buna göre kumaşın başlangıçtaki uzunluğu kaç metredir?

2. "Bir sayının 3 eksiğinin 2 katından, bu sayının $\frac{2}{5}$ i çıkarıldığında sonuç 67 bulunuyor."

Buna göre sayı x olmak üzere bu problemin çözümünde kullanılacak olan denklemi yazınız.

3. Taner'in parası Ozan'ın parasının 5 katı, Mengüç'ün parası ise Taner'in parasının 4 katıdır.

Buna göre üçünün toplam parası Ozan'ın parasının kaç katıdır?

A) 19 B) 26 C) 27 D) 29 E) 32

4. Gürkan parasının tamamı ile 3 kalem ve 6 defter ya da 4 kalem ve 4 defter alabiliyor.



Buna göre Gürkan cebindeki tüm parası ile kaç kalem alabilir?

A) 6 B) 10 C) 12 D) 14 E) 16

5. Toplamları 150 olan iki sayıdan biri diğerinin 3 katından 30 fazladır.

Buna göre bu sayıların farkı kaçtır?

A) 90 B) 95 C) 100 D) 105 E) 110

6. Serdar'ın parasının yarısı, Ahmet'in parasının üçte ikisine eşittir. Serdar, Ahmet'e 60 TL verirse ikisinin paraları eşit oluyor.

Buna göre başlangıçta Serdar'ın kaç TL si vardır?

A) 450 B) 480 C) 500 D) 560 E) 600

7. Yusuf ile Kutlu'nun toplam 70 TL parası vardır. Yusuf, Kutlu'ya 15 TL verirse, ikisinin paraları eşit oluyor.

Buna göre Kutlu'nun başlangıçta kaç TL parası vardır?

A) 30 B) 29 C) 24 D) 20 E) 18

8.



Her sorunun işaretlenmesi zorunlu olan bir test sınavında her doğru yanıt için 10 puan verilmekte, her yanlış yanıt için de 5 puan silinmektedir.

Sınavda sorulan 60 sorudan 120 puan alan bir öğrenci kaç soruya yanlış yanıt vermiştir?

A) 42 B) 36 C) 32 D) 24 E) 18

9.



Bir kümeste civcivler ve tavşanlar bulunmaktadır. Bu kümesteki hayvanların kafalarının sayısı 47 ve ayaklarının sayısı 162 olduğuna göre, kümeste kaç tavşan vardır?

A) 26 B) 30 C) 34 D) 36 E) 38

10. Bilge'nin kütüphanesindeki kitap sayıları ile ilgili olarak aşağıdakiler bilinmektedir.

- Kitap sayısının 3 katının 4 fazlası da en az 64 kitap etmektedir.
- Kitap sayısının yarısının 3 eksiği 12 den küçüktür.

Yukarıdaki bilgilere göre aşağıdakilerden hangisi Bilge'nin kitap sayısını ifade edemez?

A) 20 B) 24 C) 26 D) 28 E) 30

11. Bir çay fabrikasındaki çayları paketleyen makine, dolum esnasında fazla ya da eksik olabilecek % 0,4 lük bir hata payıyla paketleme yapmaktadır.

Buna göre bu fabrikadan alınacak 500 gr lık bir çayın gerçek kütlesi (x) aşağıdaki aralıklardan hangisinde yer alır?

A) $498 \leq x \leq 500$ B) $500 \leq x \leq 504$

C) $496 \leq x \leq 504$ D) $498 \leq x \leq 502$

E) $500 \leq x \leq 502$

12. Kerem'in çözdüğü y tane sorunun sayısı 100 den fazladır. Çözdüğü soru sayısının 2 katının 360 fazlasının 5 te biri, çözdüğü soru sayısından daha fazla olduğuna göre, Kerem'in çözdüğü soru sayısını gösteren eşitsizlik aşağıdakilerden hangisinde gösterilmiştir?

A) $-100 < y < 120$ B) $100 < y < 180$

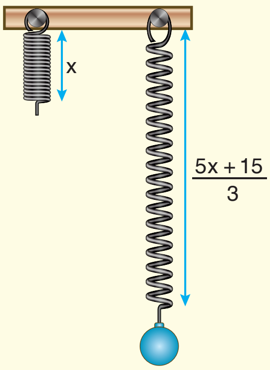
C) $-120 < y < 180$ D) $-120 < y < 100$

E) $100 < y < 120$

13. $\frac{3x-1}{4} < 2$ eşitsizliğini sağlayan en büyük tam sayı k olduğuna göre, $\frac{2a-4}{11} < k$ eşitsizliğini sağlayan en büyük a tam sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 12 B) 11 C) 10 D) 9 E) 8

14.



Yukarıdaki şekilde gösterilen, x cm uzunluğundaki bir yayın ucuna yük takıldığında yayın boyu ilk boyunun 5 katının 15 cm fazlasının $\frac{1}{3}$ i kadar uzamaktadır.

Yük takılı yayın uzunluğu 10 cm den fazla olduğuna göre x in en küçük tam sayı değeri kaçtır?

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

BÖLÜM 3.2

Hazır mısınız?

Bölüm 3.2 için Hazırlık Soruları

1.



Aşağıdaki tabloyu bir okul gününüz için uygun şekilde doldurunuz.

Etkinlik Adı	Başlangıç	Bitiş	Süre
Uyanma		-----	-----
Okul Hazırlığı			
Okul Yolculuğu			
1. Ders			
2. Ders			
3. Ders			
4. Ders			
5. Ders			
6. Ders			
Öğle Arası			
7. Ders			
8. Ders			
Eve Dönüş Yolculuğu			
Ödev ve Günlük Tekrar			
Uyku Hazırlığı			
Uyku			

2.



Ülkemizde görmek istediğiniz şehirlerden üç tanesini yazınız. Bu seyahatlerinizi hangi araçlarla gerçekleştirmek istediğinizi ve seyahat için ayırabileceğiniz zamanı aşağıdaki tabloda belirtiniz.

Görülmek İstenen Şehir	Kullanılacak Seyahat Aracı	Seyahat Süresi

3.



Haftalık ve aylık harcamalarınızın türleri ve miktarlarını aşağıdaki tabloya yazarak tabloyu doldurunuz.

Harcama Türü	Harcama Miktarı	Toplam Harcamadaki Yüzdesi

BİLİNÇLİ TÜKETİCİ ARİTMETİĞİ

Bütçe Yönetimi

Neleri Öğreneceğiz?

- Gelir-giderleri göz önüne alarak birey, aile ve kurum bütçesi oluşturabilmeyi,
- Seyahatlerde mümkün olan alternatifleri karşılaştırabilmeyi.



İnsanların ve diğer canlıların kullandığı vazgeçilmez maddeleri gereği kadar kullanarak idareli tüketmeye tasarruf adı verilir. Yaşadığımız dünyada, canlıların yaşamsal olarak kullandıkları bütün kaynakların, tükenen cinsten kaynaklar olduğu düşünülürse tasarrufun önemi bir kez daha anlaşılmış olur.

Şekil 3.2.1



Yaşamın her alanında tasarruf yapılacak alanlar mevcuttur. Bunların en önemlilerinden biri de paranın tasarrufudur. Gelir gider dengemizi kontrol altında tutarak geleceğimizi garanti altına alabilir ve istenmeyen borçlardan kurtulabiliriz.

Devletlerin, kuruluşların, ailelerin veya kişilerin gelecekteki belirli bir süre için tasarladığı gelir ve giderlerinin tümüne bütçe denir. Bütçeler gelir gider dengesini kontrol etmeye yarayan araçlardır.

Bütçede belirlenen giderler gelirlerden fazlaysa bütçe açık verir. Açık veren bütçelerin denkleştirilebilmesi için borçlanma yoluna gidilebilir. Gelir ve giderlerin birbirine eşit olduğu bütçelere denk bütçe denir. Bütçede belirlenen gelirler giderlerden fazlaysa bütçe fazla verir. Bütçenin fazla verdiği durumlarda gelirin kullanılmayan kısmına tasarruf adı verilir.

Kaynaklarını verimli kullanmak isteyen kurum veya şirketlerin yatırım politikalarını belirlemek amacıyla hazırladıkları bütçelere kurum bütçesi adı verilir.

Bilinçli tüketim alışkanlığı kazandırmanın yanında tasarruf ettirmeyi amaçlayan bütçeler, bireyler için hazırlandığında birey bütçesi, aileler için hazırlandığında da aile bütçesi adını alır.

Bütçe oluşturulurken aşağıdaki aşamalar sırasıyla uygulanır.

- *Bütçenin ne amaçla oluşturulacağı belirlenir. Amaçlar belirlenirken bunların uygulanabilir ve tutarlı olmalarına dikkat edilmelidir.*
- *Tahmini gelir ve tahmini giderler göz önünde bulundurularak gelir gider analizi yapılmalıdır.*
- *Planlanan bütçe genel anlamda kontrol edilir. Kontroller sonucunda bütçenin gerçeğe uygun olduğu kanısına varılırsa bütçe uygulamaya konulmalıdır.*

1. Örnek

"Şekil 3.2.2"de Ali'nin ailesinin hazırlamış olduğu aylık bütçenin gelir ve gider kalemleri gösterilmiştir. Buna göre bu bütçeyi yorumlayalım.

Şekil 3.2.2

Gelirler		Giderler	
Maaşlar	4500	Kira	650
		Aidat	50
		Elektrik F.	85
		Su F.	65
		Doğalgaz F.	100
		Telefon F.	150
Kira Geliri	900	Gıda	900
		Giyim	500
		Eğitim	550
		Sağlık	400
		Kredi Taksiti	850
		Diğer	250

Bunları Biliyor musunuz?

TÜİK'in 2019 yılı verilerine göre Türkiye'de bir ailenin tüketim harcamalarının en büyük dört kalemi, % 24,1 ile konut – kira, % 20,8 ile gıda, % 16,5 ile ulaşım ve son olarak % 6,5 ile lokanta ve otellerdir.

Çözüm

Ailenin kira gelirleri ve maaşlardan oluşan toplam geliri 5400 TL, toplam gideri ise 4550 TL dir. Buna göre Ali'nin ailesi ayda 850 TL, yılda 12 . 850 = 10200 TL birikim yapabilmektedir. Dolayısıyla bütçe iyi oluşturulmuş olup fazla vermektedir.

Ali'nin ailesi evlerini kiraya verip başka bir evde kirada oturmak yerine kendi evlerinde otursalardı ayda,

900 – 650 = 250 TL, yılda da 12 . 250 = 3000 TL daha az birikim yapmış olacaklardı.

Kirada oturma seçimi ailenin daha fazla tasarruf yapmasına olanak sağlamaktadır.

2. Örnek

Coşkun günde 8 saat çalışıp çalıştığı her çalışma saati için 15 TL, her fazla mesai saati için 20 TL kazanmaktadır. Ayda 4 hafta ve haftanın 6 günü çalışan Coşkun'un toplam giderleri 1900 TL dir. Aylık giderlerinin arasında 150 TL kültür – eğlence gideri olan Coşkun 20 000 TL değerindeki bir araba almak için para biriktirecektir.

Şekil 3.2.3



Buna göre,

a. Coşkun giderlerinden kısıntı yapmadan sadece fazla mesai yaparak istediği arabayı bir yıl sonunda almak istiyor. Her hafta yapacağı fazla mesai süresi aynı olmak üzere Coşkun'un haftada kaç saat fazla mesai yapması gerektiğini bulalım.

b. Coşkun kültür – eğlence giderlerinden 100 TL kısıntı yapmaya karar vermiştir. Buna göre Coşkun'un haftada 10 saat fazla mesai yapması durumunda istediği arabayı en erken kaç ay sonra alacağını bulalım.

Çözüm

a. Coşkun'un fazla mesai hariç aylık gelirini bulalım.

Coşkun çalışma saati 15 TL den günde 8 . 15 = 120 TL; haftada 6 . 120 = 720 TL ve ayda 4 . 720 = 2880 TL kazanır.

Coşkun'un gelirleri giderlerinden fazla olduğundan birikim yapabilir.

Bu birikim ayda, 2880 – 1900 = 980 TL ve yılda 12 . 980 = 11760 TL dir.

Arabanın fiyatı 20000 TL olduğundan Coşkun aradaki 20000 – 11760 = 8240 TL farkı fazla mesai yaparak 1 yılda kazanmalıdır.

Kazanç ayda 8240 : 12 ≈ 687 TL ve haftada 687 : 4 ≈ 172 TL olmalıdır.

Fazla mesainin saati 20 TL olduğundan Coşkun haftada 172 : 20 = 8,6 saat fazla mesai yapmalıdır.

b. Coşkun'un fazla mesai hariç aylık birikimi 980 TL idi. Kültür – eğlence giderlerinden ayda 100 TL kısıntı yaparsa aylık birikimi 1080 TL olur.

Coşkun haftada 10 saat fazla mesai ile 10 . 20 = 200 TL, ayda 4 . 200 = 800 TL kazanır. O hâlde aylık birikim 1080 + 800 = 1880 TL olur. Buna göre Coşkun 20000 TL değerindeki arabayı en erken, 20000 : 1880 ≈ 11 ayda alabilir.

3. Örnek

Bir şirket yöneticisi şirketi için ayda 3000 km kullanılacak bir araç kiralayacaktır. Kiralayacağı aracın kullanım şartlarına göre şirket menfaatleri için daha ekonomik olmasını planlamaktadır.

"Şekil 3.2.5" teki tabloya göre şirket yöneticisinin hangi aracı seçmesi gerektiğini bulalım.

Şekil 3.2.4



Şekil 3.2.5

Araç	Günlük Kira	Yakıt Türü	100 Km de Ortalama Tüketim	Litre Fiyatı
A	125 TL	Dizel	4,5 L	6,06 TL
B	100 TL	Benzin	6,5 L	6,20 TL

Çözüm

İki aracın da bir aylık süreçte şirkete maliyetini hesaplayalım.

A aracı için bir ayda 125 . 30 = 3750 TL kiralama ücreti ödenir. Bu araç her 100 km de 4,5 L yakıt tüketirse 3000 km lik kullanımda, (3000 : 100) . 4,5 = 135 L yakıt tüketir.

Buna göre yakıt masrafı, 135 . 6,06 = 818,1 TL dir. O hâlde A aracının kullanımı sırasında şirkete maliyeti 3750 + 818,1 = 4568,1 TL olacaktır.

B aracı için bir ayda 100 . 30 = 3000 TL kiralama ücreti ödenir. Bu araç her 100 km de 6,5 L yakıt tüketirse 3000 km lik kullanımda, (3000 : 100) . 6,5 = 195 L yakıt tüketir. Buna göre yakıt masrafı,

195 . 6,20 = 1209 TL dir. O hâlde B aracının kullanımı sırasında şirkete maliyeti 3000 + 1209 = 4209 TL olacaktır.

Buna göre kullanım şartlarına göre B aracının seçilmesi şirket açısından daha ekonomik olacaktır.

4. Örnek

Adana'da faaliyet gösteren bir maden şirketi Hatay'da yeni bir maden sahası açmıştır. Bu projenin 6 ay sürecek olan ön çalışması ve çalışanların eğitimleri için şirket tahmini olarak 40 000 TL ayırmıştır. Proje için oluşturulan bütçenin gider kalemleri "Şekil 3.2.7" deki tabloda verilmiştir. Buna göre şirketin hazırladığı bütçenin iyi hazırlanmış bir bütçe olup olmadığını inceleyelim.

Şekil 3.2.6



Şekil 3.2.7

	BÜTÇENİN GİDER KALEMLERİ	Birim	Birim Sayısı	Birim Maliyet	Toplam Maliyet	MALİYETİN GEREKÇESİ
1	**Proje personelinin maaşları**					
	Yarı–zamanlı personel **Proje asistanı**	aylık	6	1350	8100	6 ay boyunca yarı zamanlı olarak çalışacak proje asistanına her ay 1350 TL maaş ödemesi yapılacaktır.
	Kısa dönemli uzman-danışman **Hukuk uzmanı (avukat)**	günlük	10	400	4000	Bir avukat 10 çalışma gününde projede uyulması gereken yasal prosedürler konusunda bir kitapçık hazırlayacaktır.
	Kısa dönemli uzman-danışman **Mühendis**	günlük	4	750	3000	Madencilik konusunda uzman bir kişi saha şeflerine 4 gün sürecek bir eğitim verecektir.
				Ara Toplam	15100	
2	**Dışarıdan alınacak hizmetler**					
	Çeviri hizmetleri	hizmet başına	1	2000	2000	Proje dokümanları ve kitapçık bir çeviri şirketi tarafından İngilizceye çevrilecektir. Yaklaşık 50 sayfa, sayfa başına 40 TL ye çevrilecektir.
	Muhasebe hizmetleri	aylık	6	250	1500	Muhasebe kayıtlarını bir muhasebe şirketi aylık olarak tutacaktır.
				Ara Toplam	3500	
3	**Seyahat**					
	Uçuş *Ankara-Hatay-Ankara*	uçuş başına	2	325	650	Mühendis 4 günlük eğitim için Ankara-Hatay-Ankara arasında seyahat edecektir.
	Otobüs kiralanması	seyahat başına	1	450	450	Saha şeflerini (28 kişi) Adana'dan Hatay'a günübirlik çalışma ziyaretine götürmek için bir otobüs kiralanacaktır.
				Ara Toplam	1100	
4	**Konaklama**					
	Mühendisin Hatay'da konaklaması	günlük	4	240	960	
	Mühendisin akşam yemeği gideri	günlük	4	60	240	
				Ara Toplam	1200	
5	**Toplantı, seminer, konferans, eğitim giderleri**					
	Eğitim salonu kirası	günlük	4	500	2000	
	Öğle yemeği ve çay-kahve arası	kişi başına	112	30	3360	28 katılımcı * 4 gün = günlük 112 kişi
				Ara Toplam	5360	
6	**Ekipman**					
	Dizüstü Bilgisayar	ekipman başına	1	2750	2750	
	Yazıcı/Faks/Fotokopi Makinası	makina başına	1	450	450	
				Ara Toplam	3200	
7	**Yayın ve Tasarım giderleri**					
	İnternet sayfası tasarımı	hizmet başına	1	3500	3500	Projenin İnternet sayfası bir şirket tarafından geliştirilecektir.
	Kitapçık	kitapçık başına	600	2,5	1500	Yaklaşık 32 sayfa kuşe kâğıda basılı kitapçık
	Kurum Bayrağı	bayrak başına	2	45	90	2 adet 100*150 cm ölçülerinde kurum bayrağı
				Ara Toplam	5090	
8	**Toplam Proje maliyeti**				**34550**	

Çözüm

Projede tahmin edilen giderler ile gerçekleşen giderlerin birbirine çok yakın veya eşit olması gerekir. Eğer yapılan iş tahmini giderleri aşarsa bu bütçenin kötü hazırlandığı anlamına gelir. Bu projede tahmin edilen gider 40 000 TL olup gerçekleşen gider 34 550 TL'dir. Yapılan iş bütçenin tahmini giderini aşmadığından bütçe iyi hazırlanmıştır.

5. Örnek

Enerji üretimi alanında faaliyet gösteren bir şirketin ilgili bölümlerinde 2020 yılı için hazırlanan bütçesi "Şekil 3.2.9" daki tabloda gösterilmiştir.

Bu tablonun ilk iki sütununda bütçenin gider kalemlerinin tahmini ve fiili (gerçekleşen) tutarları verilmiş, yıl sonunda oluşan farklar da son sütunda gösterilmek üzere boş bırakılmıştır.

Yıl sonunda bütçenin fazla vermesi durumunda şirket bu fazla miktarı üretim aşamalarında çalışan 30 işçiye ikramiye olarak dağıtacaktır.

Şekil 3.2.8



Şekil 3.2.9

Gider Kalemleri		Tahmini	Fiili	Fark
Sigorta Poliçe Giderleri		50.000,00	45.000,00	
Kaçak - Kayıp ve İskontolar		35.000,00	50.000,00	
Ulaşım Giderleri		25.000,00	22.000,00	
İletişim Giderleri		6.000,00	6.000,00	
Makina Bakım - Onarım Giderleri		80.000,00	100.000,00	
İşçilik Giderleri	Yönetim Kademesi	40.000,00	42.000,00	
	Üretim Kademesi	80.000,00	58.000,00	
Pazarlama ve Dağıtım Giderleri		100.000,00	75.000,00	
Toplam				

Buna göre yıl sonunda her bir işçinin alacağı ikramiyenin tutarının kaç TL olduğunu bulalım.

Çözüm

Her bir gider kaleminde oluşan farklar bulunup "Şekil 3.2.10" daki tabloda gösterilmiştir. Fark sütununda siyah ile yazılan sayılar artan bakiyeleri, kırmızıyla yazılan sayılar da tahminlerin üzerindeki harcamaları göstermektedir.

Şekil 3.2.10

Gider Kalemleri		Tahmini	Fiili	Fark
Sigorta Poliçe Giderleri		50.000,00	45.000,00	5.000,00
Kaçak - Kayıp ve İskontolar		35.000,00	50.000,00	15.000,00
Ulaşım Giderleri		25.000,00	22.000,00	3.000,00
İletişim Giderleri		6.000,00	6.000,00	0,00
Makina Bakım - Onarım Giderleri		80.000,00	100.000,00	20.000,00
İşçilik Giderleri	Yönetim Kademesi	40.000,00	42.000,00	20.000,00
	Üretim Kademesi	80.000,00	58.000,00	
Pazarlama ve Dağıtım Giderleri		100.000,00	75.000,00	25.000,00
Toplam		416.000,00	398.000,00	18.000,00

Bu durumda şirketin bütçesi yıl sonunda 18000 TL fazla vermiş olup üretim kademesindeki her bir işçiye dağıtılacak ikramiye $18000 : 30 = 600$ TL bulunur.

Bir projenin uygulamaya başlayacağı tarihten tamamlanıncaya kadar geçecek sürede finansal kaynakların ve bu kaynakların hangi harcama kalemlerine göre harcanacağını gösteren bütçelere proje bütçesi denir.

Proje bütçelerinin kaynakları proje sahibinin katkıları, destekçi kurumlar olabilirken gider kalemleri, personel, yazılım, ulaşım vb. kalemlerden oluşur.

6. Örnek

Şekil 3.2.11



Depremler; ani ve yıkıcı fiziki zararların yanı sıra ekonomik, sosyal, çevresel, psikolojik kayıplara neden olabilmekte ve depremlerin yarattığı bu hasarların telafisi uzun yıllar alabilmektedir. Dünyadaki en etkin deprem kuşaklarından birinde yer alan ülkemizde, deprem risk ve etkilerinin deprem öncesi, deprem anı ve deprem sonrasını kapsayacak araştırmalara ihtiyaç duyulmaktadır.

TÜBİTAK (Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu), bilimsel ve teknolojik araştırma projelerini destekleme programı kapsamında, deprem sonrasında arama-kurtarma faaliyetlerine yönelik robotik sistemler geliştirecek ortaöğretim öğrencileri arasında bir proje yarışması düzenleyecektir.

Yarışmaya katılan bir grup öğrenci, projenin finansman desteği için okudukları okul dışında iki firmayla görüşmüştür. Öğrencilerin okulları projeye 7500 TL destekte bulunurken iki firma da proje giderlerinin toplamda % 60 kadarını karşılama sözü vermiştir. Projenin gelir - gider kalemleri aşağıda verilmiştir.

Gelirler:

- TÜBİTAK proje desteği 12500 TL
- Okul desteği 7500 TL
- İki firmadan maliyetlerin % 60 ını karşılama desteği
- Aile destekleri

Giderler:

- Yazılım 24500 TL
- Robot araç gereçleri 20000 TL
- Tasarım 4500 TL
- Ulaşım 2500 TL
- Diğer giderler 13500 TL

Proje bütçesinin açık vermemesi için öğrenci ailelerinin projeye sunacakları katkının en az kaç TL olması gerektiğini bulalım. Projenin gelir ve gider kalemlerini tablo kullanarak gösterelim.

Çözüm

Projenin toplam giderleri 24500 + 20000 + 4500 + 2500 + 13500 = 65000 TL dir.

İki firma 65000 TL lik giderin % 60 ını karşılayacağından firmalardan projeye yapılacak katkı,

$65000 \cdot \frac{60}{100} = 39000$ TL dir.

Bu durumda projenin aile destekleri dışındaki gelirlerinin toplamı,
39000 + 12500 + 7500 = 59000 TL dir.
O hâlde proje bütçesinin açık vermemesi için öğrenci ailelerinin projeye en az 65000 − 59000 = 6000 TL destek vermeleri gereklidir.

Projenin gelir giderlerini gösteren tablo “Şekil 3.2.12”de gösterilmiştir.

Şekil 3.2.12

Gider Kalemleri	Tutar (TL)	Gelir Kalemleri	Tutar (TL)
Yazılım	24500	TÜBİTAK proje desteği	12500
Robot araç gereçleri	20000	Okul desteği	7500
Ulaşım	2500	Firma destekleri	39000
Tasarım	4500	Aile destekleri	6000
Diğer giderler	13500	**TOPLAM**	**65000**
TOPLAM	**65000**		

3. Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. "Şekil 3.2.13"teki tabloda Aslı'nın aylık aile bütçesinin gelir gider kalemleri gösterilmiştir. Buna göre,

a. Aslı'nın ailesinin tabloya göre bütçelerinin açık verip vermediğini araştırınız. Bütçe fazla veriyorsa daha fazla birikim yapmaları için ne gibi kısıntılara gidebileceklerini açıklayınız.

b. Aslı'nın ailesinin gelirlerini ifade eden bir daire grafiği oluşturunuz.

Şekil 3.2.13

Gelirler			Giderler	
Maaşlar		4500	Kira	900
			Aidat	80
			Elektrik F.	95
			Su F.	75
			Doğalgaz F.	80
			Telefon F.	180
Kira Gelirleri	Ev	900	Gıda	1000
			Giyim	600
			Eğitim	750
	Dükkân	1800	Sağlık	500
			Kredi Taksiti	600
			Diğer	350

2. Sinan'ın günde 7 saat çalışarak her saat için 18 TL, her mesai saati için de 25 TL kazandığı bir işi vardır. Ayda 4 hafta ve haftanın 5 günü çalışan Sinan'ın toplam giderleri 1750 TL dir. Sinan'ın planladığı Doğu Anadolu seyahati için en az 25000 TL para biriktirmesi gerekmektedir. Buna göre,

a. Sinan sadece mesaiye kalarak istediği miktarı 1 yıl içinde biriktiriyor. Bunun için Sinan'ın günde tam sayı olarak en az kaç saat mesaiye kalması gerektiğini bulunuz.

b. Sinan günde sadece 1 saat mesaiye kalıp sonrasında yarı zamanlı olarak bir restoranda aylık 800 TL maaşla garsonluk yapmaktadır. Buna göre Sinan'ın 1 yıl içinde Doğu Anadolu seyahati için gerekli parayı kazanıp kazanamayacağını bulunuz.

Şekil 3.2.14



3. Hatay'daki bir fabrikada üretilen ürünler İstanbul'a gönderilecektir. Fabrikanın lojistik müdürü bu sevkiyatı tren ya da uçak ile gerçekleştirmek istemektedir. Bu sevkiyatların türlerine göre maliyet kalemleri "Şekil 3.2.16"daki tabloda gösterilmiştir.

Şekil 3.2.16

Araç	Mesafe	Saatlik Kira	Ortalama Hız	Saatte Ortalama Tüketim	Yakıt Türü	Litre Fiyatı
Uçak	820 km (*kuş uçusu*)	12500 TL	400 km/sa	1800 L	Jet Yakıtı	6 TL
Tren	1120 km	750 TL	80 km/sa	400 L	Motorin	6,10 TL

Ürünün sevkiyatında zaman bakımından problem bulunmadığına göre lojistik müdürünün hangi ulaşım yolunu tercih etmesi fabrikanın menfaatine olacağını ve kaç TL daha az para ödeyeceğini bulunuz.

Şekil 3.2.15



Seyahat Planlamaları

Turist rehberleri, kişi veya grup hâlindeki yerli veya yabancı turistleri kültür, turizm, tarih, çevre, doğa, sosyal vb. değerler ile varlıkları tanıtarak gezdiren kişilerdir.

Şekil 3.2.17



Geniş bir tarih ve sanat bilgisine sahip olmak durumundaki rehberlerin resmi olarak bu işi yapabilmeleri için açılan sınavlarda genel kültür, sözlü, yazılı, yabancı dil ve mülakat konularında başarı göstermeleri gerekmektedir.

Tarihteki yazılı kaynaklara geçmiş ilk rehberlerin Mısırlı rahipler olduğu bilinse de Antik Yunan'da başlayan olimpiyat oyunlarının organize seyahatlerin ve turist rehberliğinin başlangıcı olduğu sanılmaktadır.

Seyahatler öncesinde yapılan, maliyet ve zaman konularını içeren planlamalara seyahat planı denir. Seyahatlerin finansal planlamasına maliyet analizi denir. Seyahatlerde zamanın planlanması için zaman çizelgeleri kullanılır.

7. Örnek

Şekil 3.2.18



Tatil, her alışveriş gibi, bilinçli bir bütçe hazırlığı ile planlanırsa, kişileri şehir hayatının stresinden uzaklaştıracak önemli bir ihtiyacı giderir. Tatil erken planlandığında, hem birikim yapmak için yeterli zaman bulunacak hem de erken rezervasyon fırsatlarından yararlanarak daha ekonomik tatiller yapılabilecektir. Şimdi aralık ayında olduğumuzu ve önümüzdeki ağustos ayında 2 kişilik, 4 gün sürecek bir Roma tatiline çıkacağımızı varsayalım. Bunun için seyahat planı ve seyahatin maliyet analizini hazırladığımızı düşünelim.

Ankara'dan Roma'ya gidecek 2 kişi için 4 günlük bir tatil planı ve yaklaşık maliyet analizi için gider kalemleri aşağıdaki gibidir.

- İtalya vizesi için kişi başı 480 TL masraf ödenecektir. Uçak biletlerine kişi başı gidiş dönüş için ortalama 1350 TL harcanacaktır.
- Şehir merkezine yürüme mesafesindeki bir otelde konaklama için ortalama kişi başı günlük 400 TL harcanacaktır.
- Havaalanı otel transferi için taksilere ortalama 250 TL harcanacaktır. (*Dönüşte otel havaalanı arasında da ödenecektir.*)
- Gün içerisinde yemekler, çay, kahve ve su gibi ihtiyaçlar için ortalama kişi başı 200 TL harcanacaktır.
- Roma'daki ulaşım, müze ve ören yeri gibi yerlere girişte kişi başı ortalama günde 100 TL harcanacaktır.
- Aile ve arkadaşlara alınacak hediyeler için 300 TL ayrılmıştır.
- Roma'da yapacağımız diğer harcamalar için günlük kişi başı 100 TL ayrılmıştır.

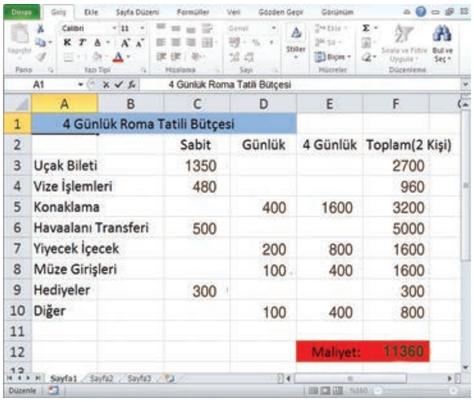
Bu seyahatin maliyet analizini yapıp kişilerin ayda ne kadar birikim yapmaları gerektiğini bularak giderleri tablolama yazılımı kullanarak gösterelim.

Çözüm

Verilen harcama kalemlerini tablolama yazılımı kullanarak seyahatin maliyet analizinde gösterelim.

"Şekil 3.2.19" daki tablodan görüldüğü gibi genel maliyet 11360 TL civarında olduğu için aralık ayından ağustos ayına kadar olan 8 aylık sürede bu iki kişi birlikte ayda $11360 : 8 = 1420$ TL, kişi başı da $1420 : 2 = 710$ TL birikim yaparsa Roma tatillerinin masraflarını çıkarabileceklerdir.

Şekil 3.2.19



	A	B	C	D	E	F
1	4 Günlük Roma Tatili Bütçesi					
2			Sabit	Günlük	4 Günlük	Toplam(2 Kişi)
3	Uçak Bileti		1350			2700
4	Vize İşlemleri		480			960
5	Konaklama			400	1600	3200
6	Havaalanı Transferi		500			5000
7	Yiyecek İçecek			200	800	1600
8	Müze Girişleri			100	400	1600
9	Hediyeler		300			300
10	Diğer			100	400	800
11						
12					Maliyet:	11360

8. Örnek

Şehirlerarası bir okul gezisi hazırlayacağımızı düşünelim. Bu tür gezilerde öğrencilerin velilerinden öğrencilerinin geziye katılımı için bir izin belgesi alınması gereklidir. Bunun yanında veliye hangi zamanda nerede olunacağı ve ne yapılacağı konusunda bir gezi planı hazırlanması gereklidir.

Şekil "3.2.21"deki tabloda Ankara'dan Çanakkale'ye cuma gecesi çıkılıp pazar dönülecek bir geziye ait aktiviteler ve zaman çizelgesi verilmiştir.

Şekil 3.2.20



Şekil 3.2.21

Okul bahçesinden Çanakkale'ye otobüsle hareket – Çanakkale'ye varış	21.00 – 06.30
Kahvaltı ve dinlenme molası	06.30 – 08.00
Kilitbahir'e hareket ve Kilitbahir Kalesi turu	08.00 – 09.00
Kilitbahir'den yürüyerek Mecidiye Tabyası'na ulaşım ve çevre turu	09.00 – 09.30
Mecidiye Tabyası'ndan Şehitler Abidesi'ne ulaşım ve Abide turu	09.30 – 10.30
Şehitler Abidesi'nden Seddülbahir Kalesi'ne hareket ve kale turu	10.30 – 11.10
Seddülbahir Kalesi'nden Ertuğrul Koyu'na hareket ve çevre turu	11.10 – 11.40
Ertuğrul Koyu'ndan Kilitbahir'e dönüş	11.40 – 12.00
Öğle yemeği ve dinlenme	12.00 – 14.00
Seyit Onbaşı Anıtı'na hareket ve çevre turu	14.00 – 14.45
Seyit Onbaşı Anıtı'ndan Mehmetçike Saygı Anıtı'na hareket ve anıt turu	14.45 – 15.45
Mehmetçike Saygı Anıtı'ndan 57. Alay Şehitliği'ne hareket ve şehitlik turu	15.45 – 16.45
57. Alay Şehitliği'nden Kilitbahir Feribot İskelesi'ne hareket	16.45 – 17.30
Feribotla Anadolu yakasına geçiş, şehir turu	17.30 – 19.30
Akşam yemeği ve dinlenme	19.30 – 20.45
Ankara'ya dönüş için hazırlıklar ve hareket – Ankara'ya varış	20.45 – 06.30

Bu gezide yemek ve dinlenme için ayrılan zamanların toplamını bulalım.

Çözüm

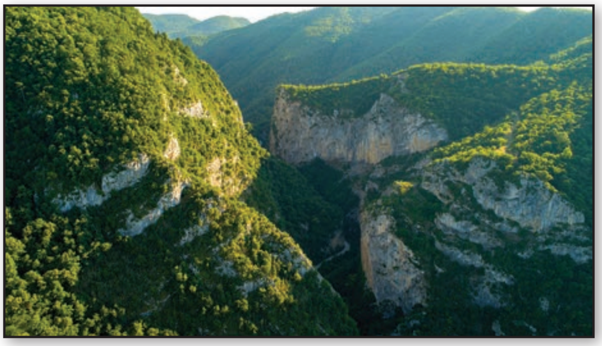
Gezinin zaman çizelgesinde saat 06.30 – 08.00 arasındaki 1,5 saatlik zaman dilimi, saat 12.00 – 14.00 arasındaki 2 saatlik zaman dilimiyle 19.30 – 20.45 arasındaki 1,25 saatlik zaman yemek ve dinlenme için ayrılmıştır. Bu zamanların toplamı $1{,}5 + 2 + 1{,}25 = 4{,}75$ saat ya da başka bir ifadeyle 4 saat 45 dakikadır.

9. Örnek

Hafta sonunun cumartesi gününü kamp yaparak değerlendirmek isteyen Bilge ve Ahmet çifti, Ankara'ya yakın konumda bulunan, yemyeşil ve el değmemiş doğası ile dikkatleri üzerine çeken Karabük'teki Yenice Ormanları'na gidecektir.

Bilge bu tür aktivitelerde kamp alanı, gezilecek yerler gibi konuları planlama görevini üstlenmekte olup bu kamp süresince belirlediği rota ve aktiviteler için "Şekil 3.2.23"teki tabloyu hazırlamıştır.

Şekil 3.2.22



Şekil 3.2.23

Aktivite	Alınacak Mesafe (km)	Harcanacak Zaman
Ankara'dan Karabük'e yolculuk	257	3 saat
İncebacaklar Köyü kamp alanına varış - kahvaltı - dinlenme - çadır kurma	–	2 saat
İncebacaklar Köyü ve Kent Ormanı yürüyüşü	4	1 saat
Öğle yemeği - dinlenme - Şeker Kanyonu'na ulaşım	2	2 saat
Şeker Kanyonu yürüyüşü	2	2 saat
Sorgun Yaylası'na yolculuk	45	1 saat
Sorgun Yaylası doğa yürüyüşü	5	2 saat
Kamp alanına dönüş - akşam yemeği	45	3 saat
Dinlenme - uyku	–	8 saat
Kahvaltı - çadır toplama - yolculuk hazırlığı	–	2 saat
Karabük'ten Ankara'ya yolculuk	257	3 saat

Bilge ve Ahmet çifti Ankara'dan cumartesi günü saat 06.00'da hareket edeceğine göre bu gezinin zaman çizelgesini hazırlayalım.

Çözüm

Zaman çizelgesini "Şekil 3.2.24"teki gibi iki sütun şeklinde oluşturulup sütunları sırasıyla aktivite ve zaman aralığı olarak isimlendirelim. Buna göre Bilge ve Ahmet çiftinin cumartesi gününde kamp yapacakları Karabük gezisi için hazırlanan zaman çizelgesi yandaki gibidir.

Şekil 3.2.24

Aktivite	Zaman Aralığı
Ankara'dan Karabük'e yolculuk	06.00 - 09.00
İncebacaklar Köyü kamp alanına varış - kahvaltı-dinlenme - çadır kurma	09.00 - 11.00
İncebacaklar Köyü ve Kent Ormanı yürüyüşü	11.00 - 12.00
Öğle yemeği - dinlenme - Şeker Kanyonu'na ulaşım	12.00 - 14.00
Şeker Kanyonu yürüyüşü	14.00 - 16.00
Sorgun Yaylası'na yolculuk	16.00 - 17.00
Sorgun Yaylası doğa yürüyüşü	17.00 - 19.00
Kamp alanına dönüş - akşam yemeği	19.00 - 22.00
Dinlenme - uyku	22.00 - 06.00
Kahvaltı - çadır toplama - yolculuk hazırlığı	06.00 - 08.00
Karabük'ten Ankara'ya yolculuk	08.00 - 11.00

10. Örnek

Şekil 3.2.25



Motosiklet tutkunu bir gezgin olan Engin, Ankara'dan başlayarak Portekiz'e kadar “Şekil 3.2.25”te görülen 4500 km lik rotayı motosikletiyle tamamlayacaktır. Bu seyahat sırasında Engin,

Şekil 3.2.26



- Günde ortalama 450 km yol yapacaktır.
- Günlük konaklama masrafları için 25 avro, yemek masrafları için de 15 avro para ayırmıştır.
- Seyahat boyunca otoyol ücretleri için 20 avro ayırmıştır.
- Motosiklet her 100 km de ortalama 4 litre benzin tüketmektedir. Rota üzerindeki ülkelerde benzinin litre fiyatı ortalama 1,4 avro dur. *(Seyahat boyunca 1 avro ortalama 6,5 TL olarak hesaplanacaktır.)*
- Portekiz'de 1 gün konakladıktan sonra motosikleti bir kargo gemisine 250 avro karşılığında İzmir'e getirmeleri için verecek ve kendisi de 350 avro ödeyerek uçakla İzmir'e dönecektir.

Buna göre Ankara'dan başlayıp İzmir'de noktalanan bu seyahatin kaç TL ye mal olacağını hesaplayalım.

Çözüm

Günde 450 km yol yapacak olan Engin Portekiz'e $4500 : 450 = 10$ günde ulaşacaktır. Bu durumda Portekiz'e ulaştığı gün dâhil olmak üzere rota boyunca 10 gün konaklayacaktır. Konaklama için günlük 25 avrodan toplam $25 . 10 = 250$ avro harcayacaktır.

10 günlük bu seyahatte toplam yemek masrafı günlük 15 avrodan $15 . 10 = 150$ avro olacaktır.

Her 100 km de 4 litre benzin tüketen motosiklet 4500 km lik yolda toplam, $(4500 : 100) . 4 = 180$ litre benzin tüketir. Benzinin litre fiyatı ortalama 1,4 avro olduğundan benzin için $180 . 1{,}4 = 252$ avro harcayacaktır.

Otoyollar için 20 avro, gemi için 250 avro ve uçak bileti için de 350 avro ödeyen Engin bu macera için toplamda, $250 + 150 + 252 + 20 + 250 + 350 = 1272$ avro harcamıştır.

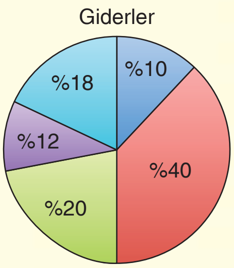
Bu miktarın paramızdaki karşılığı ise $1272 . 6{,}5 = 8268$ TL dir.

1.



Maaşı 3200 TL olan bir çalışanın gider kalemleri, kira 700 TL, faturalar ve aidat 250 TL, yiyecek masrafı 900 TL, giyecek masrafı 400 TL diğer masrafları 500 TL olduğuna göre bu çalışanın yıllık bütçesini oluşturup tablo ile gösteriniz. Bu çalışanın yapabilecekse yıl sonundaki birikiminin kaç TL olacağını bulunuz.

2. Yandaki daire grafiğinde bir ailenin gider kalemlerinin tüm giderlere göre oranları yüzde olarak gösterilmiştir. Bu ailenin tüm giderlerin %40 ına sahip yiyecek masrafları 1200 TL dir. Bu aile ayda 300 TL birikim yapabildiğine göre ailenin aylık gelirini ve giderini bulunuz.



3.



Aylık kazancınızın 250 TL arttığını, haftalık harcamalarınızın da 75 TL eksildiğini düşününüz. Bu durumda bir yılda edeceğiniz fazladan tasarrufu hesaplayınız.

4.



Ankara'da ikamet eden, anne baba ve 2 çocuktan oluşan 4 kişilik Emre ailesi İzmir'de 5 gece konaklayacak şekilde tatile gidip dönecektir.

- Çocukların yaşları 5 ile 13 tür.
- Ankara'daki ev ile İzmir'deki otel arasındaki uzaklık 600 km dir.
- Emre ailesinin kalacağı otelin her şey dâhil gecelik konaklama fiyatı, kişi başı 450 TL olup 0 – 6 yaş aralığındaki çocuklar otelden ücretsiz, 6 – 14 yaş aralığındakiler de otelden %50 indirimli yararlanabilmektedir.
- Benzinli bir araca sahip olan Emre ailesinin aracı her 100 km lik mesafede ortalama 5,5 litre benzin tüketmektedir.
- 1 litre benzinin fiyatı 6 TL dir.
- Gidiş gelişteki toplam 2 molada her bir mola için 100 TL harcama yapılacaktır.

Bu seyahat için toplam maliyeti hesaplayınız.

5. Birikim yapabilen bir ailenin tasarruflarının artması için,

I. Gelirler sabit iken tüketimin artması

II. Gelirlerin %10 artarken tüketimin %5 artması

III. Gelirler azalırken tüketimin artması

IV. Gelirler artarken tüketimin azalması

ifadelerinden hangilerinin tek başına gerçekleşmesi yeterlidir?

A) Yalnız I B) Yalnız IV C) I ve III

D) II ve III E) II ve IV

3. ALT ÖĞRENME ALANI TESTİ

1. $(2a - 3)x - a + 3x = 14$ denkleminin çözüm kümesi $\{4\}$ ise a sayısı kaçtır?

A) 2 B) 1 C) 0 D) –1 E) –2

2. $3(x + 1) + 3x - 1 = 2(x - 2) + x$ denkleminin çözüm kümesi; doğal sayılar, tam sayılar, rasyonel sayılar ve gerçek sayılar kümelerinin kaçında boş kümedir?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

3. $m(2 - 2x) = 2x + 2m + 3$ denkleminde hangi m değeri için x bulunamaz?

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

4. $2(1 - x) = x - 4 - 2(x + 3)$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\varnothing$ B) $\{-6\}$ C) $\{0\}$
D) $\{12\}$ E) $\mathbb{R}$

5. $(m + 3)x - k - 2 = 2m - 3x$ denkleminin çözüm kümesi $\mathbb{R}$ olduğuna göre $k + m$ kaçtır?

A) –4 B) –2 C) 0 D) 2 E) 4

6. $\frac{4}{x+2} + \frac{1}{x-1} + \frac{3}{x+1} + \frac{2}{x} = 4$ denklemini sağlayan x değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

7. $2(x - 1) - 3 < 4 - 3x \leq 3(6 - x) + 5x + 1$ eşitsizliğini sağlayan en küçük tam sayı ile en büyük tam sayının toplamı kaçtır?

A) –4 B) –3 C) –2 D) –1 E) 0

8. $x, y \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $-2 < x < 3$ ve $-1 < y < 6$ olduğuna göre $2y - 3x$ ifadesinin alabileceği en büyük ve en küçük tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

A) –4 B) –1 C) 4 D) 7 E) 8

9. Aşağıdaki ifadelerden hangileri doğrudur?

I. $a^3 < a^2 < a$ ise $0 < a < 1$ dir.

II. $(2a - b)x + a + 2 = 0$ denkleminin çözüm kümesi gerçek sayılar kümesine eşit ise $a + b = 6$ dır.

III. $a(x - 2) = -2x + a + 5$ denkleminde $a = 2$ için x bulunamaz.

A) Yalnız I B) Yalnız II C) II ve III
D) I ve II E) I, II ve III



Bir kahve dükkânında günde 75 ve üzerinde kahve satan elemanlar prim alma hakkına sahip oluyor. Alınacak primi modelleyen formül aşağıdaki gibidir.

$P = 2(x - 75) + 25$

Bu formülde $x \geq 75$ olmak üzere x satılan kahve sayısını, P ise TL cinsinden alınacak primi göstermektedir.

Bu bilgilere göre 10 ve 11. soruları cevaplayınız.

10. 100 kahve satan bir çalışanın alacağı prim kaç TL dir?

A) 65 B) 70 C) 75 D) 80 E) 85

11. Dükkân çalışanlardan birinin aldığı prim 45 TL ise bu çalışanın sattığı kahve sayısı kaçtır?

A) 85 B) 90 C) 95 D) 100 E) 105

12. $\left.\begin{aligned} a - 2b &= 6 \\ 2a + 3b &= 19 \end{aligned}\right\}$

denklem sistemini sağlayan a değeri kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

13. Ali'nin 8 yıl önceki yaşı Kerem'in bugünkü yaşından 20 fazladır. Kerem'in 5 yıl sonraki yaşı ise Ali'nin 2 yıl sonraki yaşının yarısı olacaktır.

Buna göre Ali ve Kerem'in yaşları toplamı kaçtır?

A) 68 B) 56 C) 48 D) 38 E) 28

14.



Bir tur otobüsündeki erkeklerin sayısı, kadınların sayısının 2 katından 1 fazladır. Eğer otobüse 5 kadın biner, otobüsten de 6 erkek inerse otobüsteki kadın ve erkek sayıları eşit olacaktır.

Buna göre başlangıçta otobüste kaç yolcu vardır?

A) 10 B) 21 C) 27 D) 31 E) 37

15. $\left.\begin{aligned} ax - 2by &= 1 \\ 2ax + by &= 22 \end{aligned}\right\}$

denklem sisteminin çözüm kümesi $\{(3, 2)\}$ olduğuna göre b kaçtır?

A) 3 B) 2 C) 1 D) –1 E) –2

16. Bir işyerinde işçilerin bir kısmının aylık ücreti x TL, kalan kısmının da y TL dir. Bu işçilere yapılacak aylık ücret zammı için iki seçenek vardır. Birincisi net 800 TL, ikincisi aylığın %25 idir. Ayda x TL alan işçi 800 TL lik zammı, y TL alan işçi de %25 lik zammı tercih ediyor.

Buna göre aşağıdaki bağıntılardan hangisi doğrudur?

A) $x < 3200 < y$ B) $3200 < x < y$
C) $x < y < 4500$ D) $3200 < y < x$
E) $x < y < 3200$

17.



Öğretmen olan Coşkun Bey'in aylık maaşı 4400 TL, eşi Buket Hanım'ın da aylık maaşı 4100 TL dir. Yeni evli olan bu çiftin aylık giderleri aşağıdaki gibidir:

- Kira: 750 TL
- Ulaşım: 450 TL
- Mutfak masrafları: 900 TL
- Eğlence – kültür: 400 TL

Maaşları dışında bir geliri olmayan bu çiftin 48000 TL birikimleri mevcuttur.

Bu çift 300 000 TL değerindeki bir evi borçlanmadan almak istemektedir. Evin fiyatının sabit kalacağı düşünülürse çiftin bu evi satın alabilmesi için en az kaç ay para biriktirmesi gerekir?

A) 39 B) 40 C) 41 D) 42 E) 43

18.



Ortalama boy ve kiloda bir yetişkin olan Ünal'ın günlük 2500 kalori alması gereklidir. Ünal bir günde sandviç ve baklavalardan oluşan toplamda 9 parça yiyecek yiyerek günlük kalori ihtiyacını karşılamıştır.

Bir dilim baklava 300 kalori ve bir sandviç 260 kalori olduğuna göre Ünal bu günde kaç dilim baklava tüketmiştir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

19. "Bir çiftlikte bulunan tavukların sayısı keçilerin sayısından 35 fazladır. Tavuk ve keçilerin ayak sayılarının toplamı 160 ise bu çiftlikteki keçi sayısı kaçtır?"

Bu problemin çözümü için gerekli olan denklem sistemi aşağıdakilerin hangisinde verilmiştir?

A) $\left.\begin{array}{r} a+b=35 \\ 2a+4b=160 \end{array}\right\}$ B) $\left.\begin{array}{r} a-b=35 \\ 4a+2b=160 \end{array}\right\}$

C) $\left.\begin{array}{r} a-b=35 \\ 2a+4b=160 \end{array}\right\}$ D) $\left.\begin{array}{r} a-b=35 \\ 4a-2b=160 \end{array}\right\}$

E) $\left.\begin{array}{r} ax-2by=1 \\ a+4b=22 \end{array}\right\}$



20. Batu'nun Afrika turuna çıkabilmesi için 21 000 TL lik bir bütçe ayırması gerekmektedir. Batu bir kahve dükkânında yarı zamanlı çalışarak haftalık 450 TL kazanıyor. Bunun yanı sıra düzeltmenlik yaparak yeni yazılmış kitapları sayfası 2 TL ye okuyup baskıdan önce imla hatalarını buluyor.

Batu'nun aylık giderleri 1200 TL olduğuna göre sadece tasarruflarını kullanarak bir yıl içinde Afrika turu için hesapladığı bütçeyi ayda en az kaç sayfa okuyarak oluşturabilir?

A) 475 B) 500 C) 525 D) 550 E) 575

21.

	Eko Paket	Mini Paket	Midi Paket	Maksi Paket	Mega Paket
Konuşma (Dakika)	400	600	1000	2000	3000
Kısa Mesaj (Adet)	100	250	500	1000	2000
İnternet (GB)	1	3	5	7	10
Aylık Fatura Tutarı (TL)	20	30	48	60	100

Yukarıdaki tabloda bir GSM operatörünün kullanıcılarına sunduğu paket seçenekleri verilmiştir. Paket aşımlarında ücretlendirme,

1 Mesaj: 30 Kuruş
1 Dakika konuşma: 60 Kuruş
100 MB İnternet: 5 TL şeklindedir.

Bilge Hanım telefonuyla günde ortalama 20 dakika konuşma yapmakta, 10 adet kısa mesaj göndermekte ve 90 MB internet kullanmaktadır. Ücretlendirmenin 30 günlük periyotlarla yapıldığı varsayıldığında Bilge Hanım için en uygun paket aşağıdakilerden hangisidir? *(1 GB = 1000 MB tır.)*

A) Eko B) Mini C) Midi D) Maksi E) Mega



Araç	Araç Bedeli	Yakıt Türü	100 km de Ortalama Tüketim	Litre Fiyatı
A	91 000 TL	Dizel	4 L	6,50 TL
B	70 000 TL	Benzin	8 L	7 TL

Kerem Bey, yukarıdaki tabloda bilgileri verilen A ve B araçlarından birini alacaktır.

Bu bilgilere göre 22 ve 23. soruları cevaplayınız.

22. A aracını alan Kerem Bey aracı en az kaç bin kilometre kullanıldıktan sonra (araca ve yakıta ödenen toplam bedel açısından) B aracına göre kâra geçmiş olur?

A) 35 B) 45 C) 60 D) 70 E) 75

23. A aracını alan ve 105 000 km kullanan Kerem Bey B aracına göre kaç TL kâr etmiş olur?

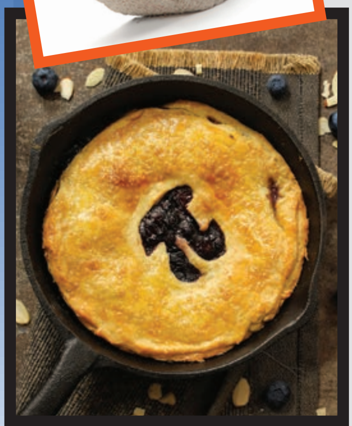
A) 9500 B) 10000 C) 10500
D) 11000 E) 11500

4. ALT ÖĞRENME ALANI









ÇEMBER VE DAİRE

Bölümler

İcadıyla insan hayatında adeta çığır açmış buluşlardan biri tekerlektir. Günlük hayatımızdaki ulaşım araçlarının büyük çoğunluğunda tekerlek kullanılmaktadır. Şekil itibariyle model alındığı çemberin herhalde hayatımızda ne kadar önemli olduğu buradan anlaşılabilmektedir.

PROJE



PROJE PROJE PROJE PROJE

Projenin Adı: Bayraklar ve Geometri

Projenin Amacı: Türk Bayrağı'nın geometrik özelliklerini kavrayarak Türk Bayrağı'nı inşa edebilmek

Projenin Aşamaları

Projenin Hazırlık Süreci



1. Türk Bayrağı'nın tarihçesi ile ilgili bir araştırma yapınız.
2. Türk Bayrağı kanununu inceleyiniz.
3. İnşa edeceğiniz Türk Bayrağı'nın boyutlarını belirleyiniz.
4. Bayrak inşası için kullanacağınız malzemeleri temin ediniz.
5. İçinde ay ve yıldız olan resmi devlet bayraklarından dört tanesini belirleyiniz.
6. Hazırlık sürecinde elde ettiğiniz yazılı ve görsel dokümanları bir araya getirip bütünsel olarak inceleyiniz.
7. Elde ettiğiniz bilgileri rapor hâline getiriniz.



Projenin İçeriği

Bireysel olarak hazırladığınız proje aşağıdaki maddeleri içermelidir.

1. Türk Bayrağı kanununu,
2. İçinde ay ve yıldız olan resmi devlet bayraklarından dört tanesinin görsellerini,
3. Türk Bayrağı'nın ay ve yıldızını oluşturan çemberlerin konumlandırıldığı taslak çizimini,
4. Türk Bayrağı'nın tarihçesinin kısaca anlatıldığı sayfaları.

Projenin Sunum Süreci

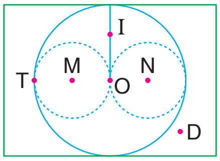
1. Araştırmalarınızın sonuçlarını, ilgili resim ve canlandırmalarla zenginleştirip bir bilgisayar sunumu hazırlayınız.
2. Araştırmalarınızın sonunda topladığınız bilgilerle bir poster sunumu hazırlayınız.

Hazır mısınız?

Bölüm 4.1 için Hazırlık Soruları

1. Çemberin mi yoksa dairenin mi alanından söz edilebilir? Açıklayınız.

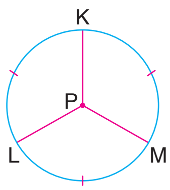
2. Yandaki E düzlem modelinde T, M, O ve N noktaları doğrusaldır. O büyük çemberin, M ve N noktaları ise eş olan küçük çemberlerin merkezini göstermektedir.



$|ON| = 4$ cm ise aşağıdakilerden hangileri doğrudur?

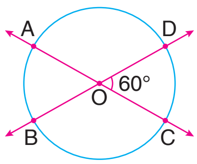
I. $|MN| > 4$ cm
II. $|OT| = 4$ cm
III. $|OI| < 8$ cm
IV. 4 cm $< |OD| < 8$ cm

3. Yandaki P merkezli çemberde $\overset{\frown}{KM}$, $\overset{\frown}{ML}$ ve $\overset{\frown}{LK}$ eş çember parçaları gösterilmiştir. Buna göre KPM açısının ölçüsü kaç derecedir?



A) 90 B) 100 C) 120
D) 140 E) 150

4. Yandaki O merkezli çemberde $AC \cap BD = \{O\}$ ve $m(\overset{\frown}{DOC}) = 60°$ ise aşağıdaki noktalı yerleri doldurunuz.

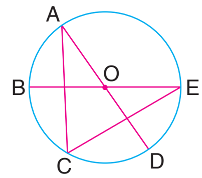


a. $m(\overset{\frown}{DC}) = ...$ **b.** $m(\overset{\frown}{AB}) = ...$

c. $m(\overset{\frown}{AOD}) = ...$ **d.** $m(\overset{\frown}{AD}) = ...$

e. $m(\overset{\frown}{BCD}) = ...$ **f.** $m(\overset{\frown}{BOC}) = ...$

5. Yandaki O merkezli, [AD] ve [BE] çaplı çembere göre aşağıdaki noktalı yerleri uygun şekilde doldurunuz.



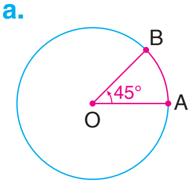
a. $m(\overset{\frown}{AB}) = 70°$ ise $m(\overset{\frown}{ED}) = ...$dir.

b. $m(\overset{\frown}{AOE}) = 110°$ ise $m(\overset{\frown}{ACE}) = ...$dir.

c. $m(\overset{\frown}{BC}) + m(\overset{\frown}{CD}) + m(\overset{\frown}{DE}) = ...$dir.

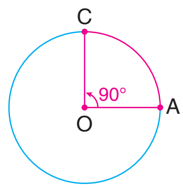
6. Aşağıdaki çemberlerin her birinin çevre uzunluğu 100 cm ise aşağıdaki noktalı yerleri doldurunuz.

a.



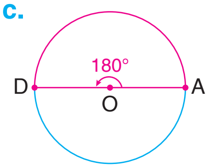
$|\overset{\frown}{BA}| = ...$

b.



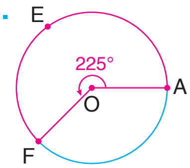
$|\overset{\frown}{CA}| = ...$

c.



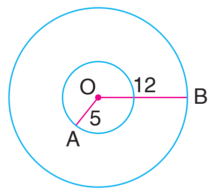
$|\overset{\frown}{DA}| = ...$

d.



$|\overset{\frown}{FEA}| = ...$

7. Yandaki O merkezli çemberlerde $|AO| = 5$ br ve $|OB| = 12$ br ise dıştaki büyük çemberin çevresinin uzunluğu, küçük çemberin çevresinin uzunluğundan kaç santimetre daha fazladır? *($\pi = 3,14$ alınız.)*



A) 43,96 B) 44,22 C) 47,16
D) 49,20 E) 50,26

BÖLÜM 4.1

ÇEMBERİN TEMEL ELEMANLARI

Çemberin Temel Elemanları

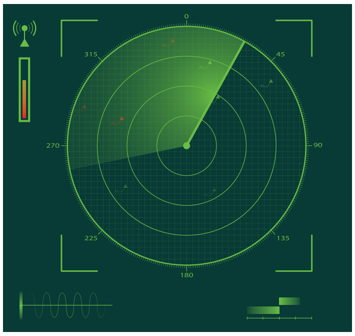
Neleri Öğreneceğiz?

- Çap, yarıçap, yay, teğet ve kiriş gibi çemberin temel elemanlarını.

Günlük Hayat Bağlantısı

Radar, bir noktadan belirli bir uzaklığa kadar olan nesneleri radyo dalgaları yardımıyla tespit eden cihaza verilen addır. Alman bir mühendis tarafından 1904 yılında patenti alınan radardan çıkan elektromanyetik dalgalar, radarın kapsama alanına giren nesnelere çarpıp yansır ve radara geri ulaşır. Radar da dalgaların gidiş geliş süresini hesaplayarak nesnenin radara olan uzaklığını hesaplayabilir.

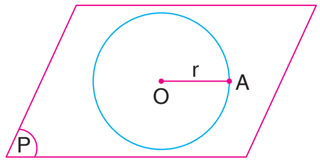
Şekil 4.1.1



"Şekil 4.1.1" de izleme ekranı görülen deniz radarının en çok 100 km uzaklıktaki gemileri belirleyebildiğini düşününüz. Buna göre bir geminin doğrusal hareket ederek bu radarda belirlenebilme şartı sizce ne olabilir? *(118. sayfadaki "2. Örnek" e bakınız.)*

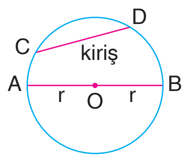
- *Düzlemde sabit bir noktadan r birim uzaklıkta bulunan noktaların kümesine r birim yarıçaplı çember denir. "Şekil 4.1.2" deki sabit nokta (O) çemberin merkezidir.*

Şekil 4.1.2



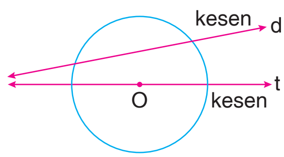
- *Bir çemberin farklı iki noktasını birleştiren doğru parçasına çemberin kirişi, merkezinden geçen kirişe de çemberin çapı denir. Çemberin çap uzunluğu R ile gösterilir. "Şekil 4.1.3" teki O merkezli ve r yarıçaplı çemberde [CD] ve [AB] birer kiriştir. [AB] kirişi merkezden geçtiği için aynı zamanda çemberin çapıdır.*

Şekil 4.1.3



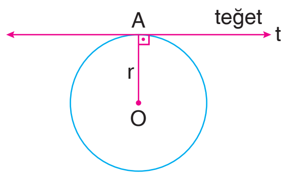
- *Çember üzerindeki iki noktanın arasında kalan çember parçalarına yay denir. Bu yaylardan küçük olanı minör yay, büyük olanı ise majör yay olarak adlandırılır. "Şekil 4.1.3" teki O merkezli çemberde $\overset{\frown}{CD}$ minör yay, $\overset{\frown}{CAD}$ da majör yaydır.*

Şekil 4.1.4



- *Çemberi farklı iki noktada kesen doğruya çemberin bir keseni denir. "Şekil 4.1.4" te O merkezli çemberin d ve t kesenleri verilmiştir.*

Şekil 4.1.5



- *Bir çemberle sadece bir noktada keşisen doğruya çemberin teğeti denir. "Şekil 4.1.5" teki O merkezli çemberin t teğeti çizilmiştir. Çember ile t teğetinin kesişim kümesi {A} dır. A noktası teğetin değme noktasıdır. Ayrıca teğet değme noktasından çizilen yarıçap teğete diktir. $[OA] \perp t$ dir.*

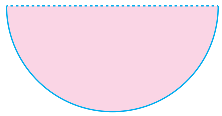
1. Örnek

Yarıçap uzunluğu 10 cm olan bir dairesel kâğıda, sadece katlama işlemi yapılarak kat izleriyle oluşturulacak en büyük karenin alanının kaç cm^2 olduğunu bulalım.

Çözüm

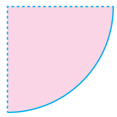
Dairesel kâğıdı “Şekil 4.1.6” daki gibi ikiye katlayalım.

Şekil 4.1.6

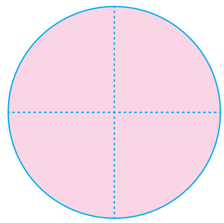


Oluşan bu iki katlı yarım daire şeklindeki kâğıdı “Şekil 4.1.7” deki gibi tekrar ikiye katladıktan sonra “Şekil 4.1.8” deki gibi kâğıdı birbirine dik olan kat izlerini görecek şekilde açalım. Buradaki kat izleri, dairenin en uzun kirişleri olan çapları temsil etmektedir.

Şekil 4.1.7

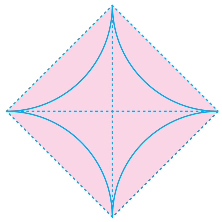


Şekil 4.1.8



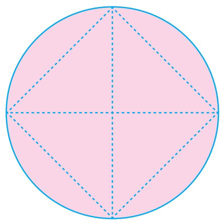
Dairenin kat izleriyle sınırlanan yaylarını “Şekil 4.1.9” daki gibi içe katlayıp kat izlerini görecek şekilde tekrar açalım.

Şekil 4.1.9



Son durumda “Şekil 4.1.10” daki gibi oluşan kat izleri, en uzun kirişleri köşegen kabul ettiğinden belirlenebilecek en büyük karenin sınırlarını ifade eder. Ayrıca “Şekil 4.1.8” de belirlediğimiz kat izleri, oluşturduğumuz karenin köşegenlerini ifade eder. Köşegenlerden her biri dairenin çapı olduğundan her birinin uzunluğu 20 cm dir.

Şekil 4.1.10



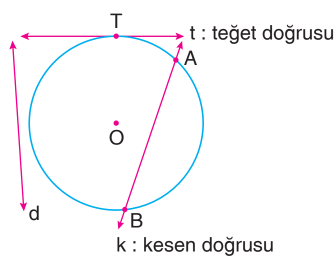
Köşegenleri dik keşisen dörtgenin alanı, köşegen uzunluklarının çarpımının yarısı alınarak bulunabilir. O hâlde dairesel kâğıdın kirişleriyle oluşturulmuş en büyük karenin alanı $\frac{20.20}{2} = 200\ cm^2$ bulunur.

114. sayfadaki projede “Projenin Hazırlık Süreci” bölümüne başlayabilirsiniz.

Düzlemde bir doğru ile çember, birbirine göre üç farklı durumda bulunabilir.

Doğru, “Şekil 4.1.11” deki d doğrusu gibi çemberin dışında, t doğrusu gibi çembere teğet veya k doğrusu gibi çemberin bir keseni olabilir.

Şekil 4.1.11



2. Örnek

Günlük Hayat Bağlantısı

Konunun girişinde radarlardan bahsetmiştik. Denizde kullanılan bir radarın kapsama alanı sınırlarının analitik düzlemde merkezi orijinde, yarıçap uzunluğu da 100 km olan bir çember belirttiğini düşünelim. Buna göre aşağıdaki doğrusal rotaları kullanan gemilerin radarda görünüp görünmeyeceklerini belirleyelim.

Şekil 4.1.12

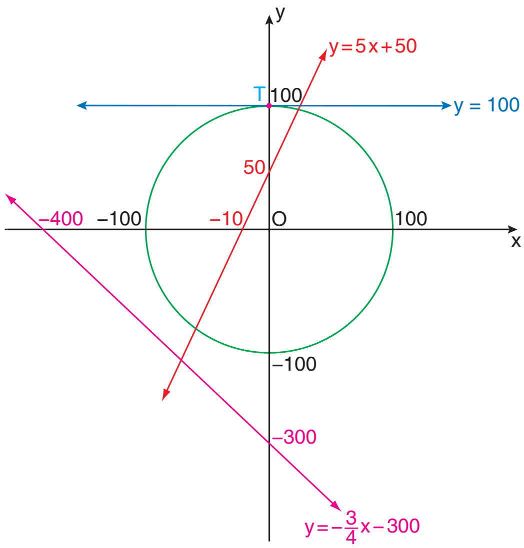


a. $y = 5x + 50$ **b.** $y = 100$ **c.** $y = -\frac{3}{4}x - 300$

Çözüm

Radarın kapsama alanının sınırlarını gösteren çember "Şekil 4.1.13"teki analitik düzlemde gösterilmiştir.

Şekil 4.1.13



a. İlk geminin rotası olan $y = 5x + 50$ doğrusunu çizelim. Doğrunun denkleminde değişkenler yerine sırayla sıfır yazarak doğrunun eksenleri kestiği noktaları bulalım.

$x = 0 \Rightarrow y = 50$ ve $y = 0 \Rightarrow x = -10$ dur. Bu doğrunun grafiğini "Şekil 4.1.13"te kırmızı ile çizdiğimizde radarın kapsama alanını içerisinden geçtiği görülür.

O hâlde bu rotayı izleyen gemi radarda uzunca bir süre belirlenebilecektir.

b. İkinci geminin rotası olan $y = 100$ doğrusunu çizelim.

Doğru analitik düzlemin sadece y eksenini (0, 100) noktasında keser. Bu doğrunun grafiğini "Şekil 4.1.13"te mavi ile çizelim. Çizilen doğru grafiğinin radarın kapsama alanına sadece T noktasında girdiği görülür. O hâlde bu rotayı izleyen gemi radarda sadece bir an belirlenebilecektir.

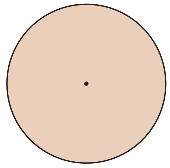
c. Son geminin rotası olan $y = -\frac{3}{4}x - 300$ doğrusunu çizelim. Doğru eksenleri $x = 0 \Rightarrow y = -300$ ve $y = 0 \Rightarrow x = -400$ noktalarında keser.

Bu doğrunun grafiğini "Şekil 4.1.13"te pembe ile çizdiğimizde radarın kapsama alanını içerisiden geçmediği görülür. O hâlde bu rotayı izleyen gemi radarda hiçbir zaman belirlenemeyecektir.

UYARI

Radar merkezinin (orijinin), rotaları belirten doğrulara olan uzaklıkları kullanılarak da gemilerin radarda belirlenip belirlenmeyeceğini bulabiliriz. İlk doğrunun orijine uzaklığı yarıçaptan küçük, ikinci doğrunun orijine uzaklığı yarıçapı eşit ve üçüncü doğrunun orijine uzaklığı yapıçaptan büyüktür. O hâlde ilk ve ikinci rota belirlenebilir, üçüncü rota radarda belirlenemez.

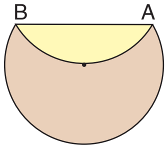
3. Örnek



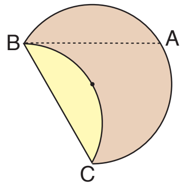
Şekil 4.1.14

"Şekil 4.1.14" teki dairesel kâğıdı katlayarak kat izleriyle bir düzgün altıgenin köşelerini belirleyelim. Köşelerini belirlediğimiz bu düzgün altıgeni çizelim.

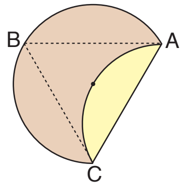
Çözüm



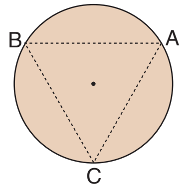
Şekil 4.1.15



Şekil 4.1.16

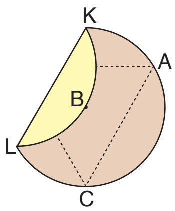


Şekil 4.1.17

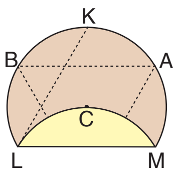


Şekil 4.1.18

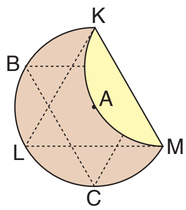
Dairenin etrafındaki bir noktayı "Şekil 4.1.15" teki gibi merkeze gelecek şekilde katlayarak kat iziyle [AB] kirişini oluşturalım. Daha sonra kat izinin bir ucu B noktasına ve daire etrafındaki bir noktayı merkeze gelecek şekilde "Şekil 4.1.16" daki gibi katlayarak [BC] kirişini oluşturalım. Son olarak kat izinin uçları A ve C noktaları olacak şekilde "Şekil 4.1.17" deki gibi katlayarak [AC] kirişini oluşturalım. Kat izleriyle oluşan ABC eşkenar üçgeni "Şekil 4.1.18" de gösterilmiştir.



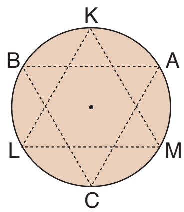
Şekil 4.1.19



Şekil 4.1.20

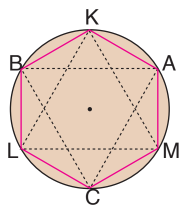


Şekil 4.1.21



Şekil 4.1.22

Dairenin etrafında belirlediğimiz B noktasını "Şekil 4.1.19" daki gibi merkeze gelecek şekilde katlayarak kat iziyle [KL] kirişini oluşturalım. Daha sonra kat izinin bir ucu L noktasına ve dairenin etrafında belirlediğimiz C noktası merkeze gelecek şekilde "Şekil 4.1.20" deki gibi katlayarak [LM] kirişini oluşturalım. Son olarak kat izinin uçları K ve M noktaları olacak şekilde "Şekil 4.1.21" deki gibi katlayarak [KM] kirişini oluşturalım. Kat izleriyle oluşan KLM eşkenar üçgeni "Şekil 4.1.22" de gösterilmiştir.



Şekil 4.1.23

Katlama işlemlerinden sonra dairenin etrafında belirlediğimiz A, K, B, L, C ve M noktalarının arasındaki uzaklıklar birbirine eşittir. Dolayısıyla bu noktalar bir düzgün altıgenin köşeleri olacaktır. O hâlde dairenin içerisine çizilen AKBLCM düzgün altıgeni "Şekil 4.1.23" te gösterilmiştir.

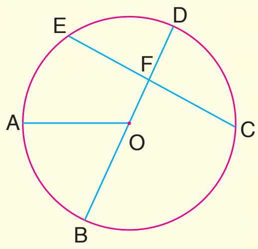
1. Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. Bir dairede kirişlerle oluşturulmuş en büyük karenin alanı $100\ cm^2$ olduğuna göre dairenin yarıçap uzunluğunun kaç santimetre olduğunu bulunuz.

2. Merkezi, koordinat sisteminin orijininde ve yarıçap uzunluğu 100 km olan daire kadar kapsama alanı olan bir radarın aşağıdaki doğrusal rotaları izleyen gemilerden hangilerini hiçbir zaman belirleyemeyeceğini bulunuz.

a. $y = 100 - x$ **b.** $x = -100$ **c.** $y = -2x + 500$ **d.** $y = 100x$ **e.** $200 + y = 0$ **f.** $\frac{x}{20} + \frac{y}{50} = 1$

1. Yandaki O merkezli çemberde gösterilen doğru parçalarından kaç tanesi çemberin yarıçapıdır? (B, F ve D noktaları doğrusaldır.)



2. Aşağıdaki cümlelerdeki boşluklara gelmesi gereken ifadeleri parantez içlerinde verilenler arasından seçerek yazınız.

a. Düzlemde sabit bir noktaya eşit uzaklıkta olan noktaların kümesi bir .... (daire / çember) belirtir.

b. Bir pergelin açıklığı 4 cm olacak şekilde ayarlanıp sabit ucu A noktasına konulup bir çember çizilirse çemberin çap uzunluğu .... (4 cm / 8 cm) olur.

c. Açıklığı 8 cm olacak şekilde ayarlanan ve sabit ucu O noktasına konulup çizilen bir çember düşünelim. Bu durumda O noktasına olan uzaklığı 5 cm olan bir B noktası çemberin .... (içinde / dışında) yer alır.

d. Bir çemberin yarıçapının uzunluğu, çapının uzunluğunun .... (iki katıdır / yarısıdır).

3. Kâğıttan oluşturulmuş bir dairenin içinde, herhangi bir araç kullanamadan, sadece katlama yoluyla bir eşkenar üçgeni nasıl elde edeceğinizi açıklayınız.

4. Çember ve elemanlarıyla ilgili aşağıdaki ifadeler doğruysa boş kutulara "D", yanlışsa "Y" yazınız.

a. ☐ Bir çemberde tüm kirişler eşit uzunluktadır.

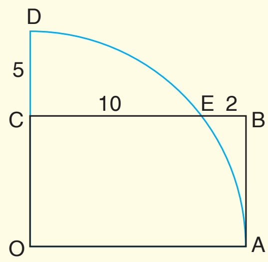
b. ☐ Kesen ile bir çemberin iki ortak noktası vardır.

c. ☐ Teğet ile çemberin ortak noktası olmayabilir.

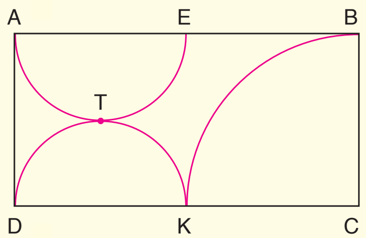
d. ☐ Bir çemberde çizilebilecek en uzun kiriş merkezden geçer.

e. ☐ Bir kirişin çember üzerinde ayırdığı yaylar birbirine eş ise o kiriş aynı zamanda çaptır.

5. Yandaki şekilde O merkezli çeyrek çember ve OABC dikdörtgeni verilmiştir. |DC| = 5 br, |CE| = 10 br ve |EB| = 2 br olduğuna göre dikdörtgenin çevre uzunluğunun kaç birim olduğunu bulunuz.



6.

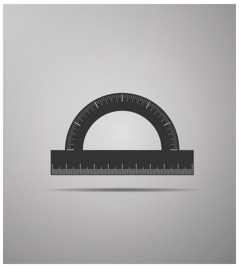


ABCD dikdörtgeninde [AE] ve [DK] çaplı çemberler T noktasında teğet, [DK] çaplı çember ile de C merkezli çeyrek çember K noktasında teğettir. Dikdörtgenin çevre uzunluğu 36 cm olduğuna göre |AD| + |EB| kaç cm dir?

Hazır mısınız?

Bölüm 4.2 için Hazırlık Soruları

1. Yandaki şekilde açı çizmeye veya çizilmiş bir açının ölçüsünü bulmaya yarayan açıölçer ya da başka bir adıyla iletki gösterilmiştir. Sizce yandaki açıölçerle tek hamlede ölçülebilecek en büyük açının ölçüsü kaç derecedir? Nedenini açıklayınız.



2. Yandaki saat görseline göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

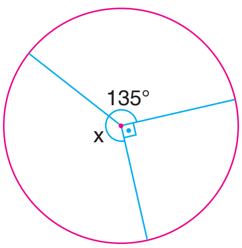


a. Hangi tam saatlerde akrep ile yelkovan arasındaki açının ölçüsü 90° olur?

b. Hangi tam saatlerde akrep ile yelkovan arasındaki açının ölçüsü 180° olur?

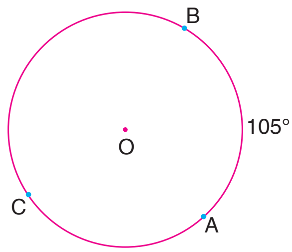
c. Akrep ile yelkovan yukarıdaki konumdayken aralarındaki açı kaç derecedir?

3. Yandaki çemberde verilen merkez açılardan ikisinin ölçüsü 135° ve 90° dir. Buna göre x kaç derecedir?



4. Herhangi bir çember yayı eş olarak 5 parçaya ayrılmış olsun. Bu durumda oluşan ardışık iki yayın birleşimiyle oluşan yeni yayın ölçüsü kaç derece olur?

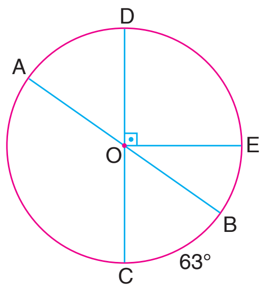
5. Yandaki O merkezli çemberde AB yayının ölçüsü 105° olduğuna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.



a. ACB yayının ölçüsü kaç derecedir?

b. BC yayının ölçüsü AC yayının ölçüsünün iki katıdır. Buna göre AC ve BC yaylarının ölçülerinin kaç derece olduğunu bulunuz.

6. Yandaki O merkezli çemberde [AB] ve [CD] çaptır. BC yayının ölçüsü 63° ve DOE açısı diktir. Buna göre aşağıda istenen ölçüleri bulunuz.



a. $m(\widehat{BOC})$ **b.** $m(\overset{\frown}{DAC})$

c. $m(\widehat{AOE})$ **d.** $m(\overset{\frown}{EDB})$

BÖLÜM 4.2

ÇEMBERDE AÇILAR

Çemberde Açılar

Neleri Öğreneceğiz?

- Çemberde merkez ve çevre açıların özelliklerini kullanarak işlemler yapabilmeyi.

Günlük Hayat Bağlantısı

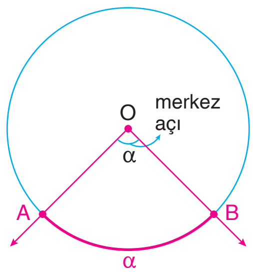
Dönme dolaplar, lunaparklarda bulunan, dik duran tekerlek biçimindeki eğlence araçlarına verilen genel addır. İlk dönme dolap örneklerinin 16. YY. da Osmanlı'da görüldüğü ifade edilmektedir.

Şekil 4.2.1



Günümüzdeki en modern dönme dolaplardan biri ise "Şekil 4.2.1"deki fotoğrafta görülen İngiltere'deki London Eye (*londın ay*)'dır. İleri teknoloji ürünü olan 120 metre çapındaki bu dönme dolap, turistik amaçlı olarak 2000 yılında kullanıma açılmıştır. 32 adet seyir kapsülü bulunan dönme dolap, merkezde birleşen çelik halatlar yardımıyla dönebilmektedir. *(123. sayfadaki "2. Örnek"e bakınız.)*

Şekil 4.2.2



Köşesi çemberin merkezinde olan ve ışınları çemberi iki noktada kesen açıya merkez açı denir.

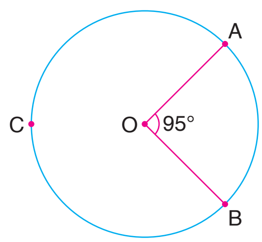
"Şekil 4.2.2"deki O merkezli çemberde AOB açısı bir merkez açıdır. AOB merkez açısının ölçüsü, gördüğü AB yayının ölçüsüne eşittir.

Yani, $m(\widehat{AOB}) = m(\overset{\frown}{AB}) = \alpha$ *dır.*

---

1. Örnek

Şekil 4.2.3



"Şekil 4.2.3"teki O merkezli çemberde $m(\widehat{AOB}) = 95°$ olduğuna göre ACB yayının ölçüsünün kaç derece olduğunu bulalım.

Çözüm

Merkez açıların ölçüleri, gördükleri yayın ölçüsüne eşittir. Buna göre

$m(\widehat{AOB}) = 95° \Rightarrow m(\overset{\frown}{AB}) = 95°$ dir.

Bir çember yayının tamamı 360° olduğundan $m(\overset{\frown}{AB}) + m(\overset{\frown}{ACB}) = 360°$

$95° + m(\overset{\frown}{ACB}) = 360°$

$m(\overset{\frown}{ACB}) = 265°$ bulunur.

Proje

114. sayfadaki projede "Projenin İçeriği" bölümündeki ilk adımı gerçekleştirebilirsiniz.

2. Örnek

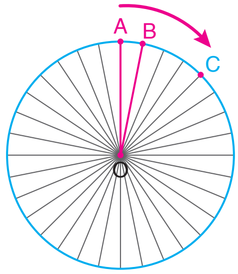
Konunun girişinde, turistik dönme dolap London Eye'ın 120 metre çaplı çemberinin etrafında eşit aralıklarla yerleştirilmiş 32 tane seyir kabini olduğundan bahsetmiştik. Kabinlerden birisi dönüp 4 kabin sonrasındaki kabinin yerine geldiğinde kaç derecelik bir merkez açıyla dönmüş olacağını bulalım.

Şekil 4.2.4



Çözüm

Şekil 4.2.5



Dönme dolabın 32 kabininin bağlı olduğu çemberi ve kabinleri merkezle birleştiren çelik halatların çizgi modeli "Şekil 4.2.5"te gösterilmiştir.

Eş aralıklarla yerleştirilen 32 kabin, tüm çember yayı üzerinde 32 eş yay oluşturur. Bu yaylardan her birinin ölçüsü,

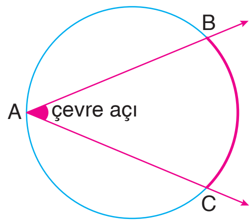
$m(\overset{\frown}{AB}) = \frac{360°}{32} = 11{,}25°$ dir.

A noktasındaki kabinin 4 kabin sonraki C noktasındaki kabinin yerine gelmesi için dönme dolabın $\overset{\frown}{AC}$ kadar dönmesi gerekir.

$\overset{\frown}{AC}$ nın ölçüsü $m(\overset{\frown}{AC}) = 4 \cdot m(\overset{\frown}{AB}) = 4 \cdot (11{,}25°) = 45°$ dir.

Merkez açının ölçüsü, gördüğü yayın ölçüsüne eşittir. Buna göre, A noktasındaki kabinin C noktasına gelmesi için $m(\overset{\frown}{AC}) = m(\widehat{AOC}) = 45°$ lik bir merkez açı ile dönmesi gerekir.

Şekil 4.2.6



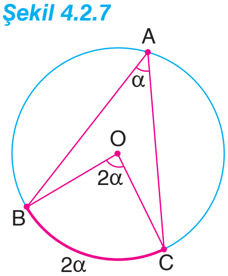
Köşesi çember üzerinde olan ve ışınları çemberi diğer iki noktada kesen açıya çevre açı denir.

"Şekil 4.2.6" daki çemberde BAC açısı bir çevre açıdır. BAC çevre açısının ölçüsü, gördüğü BC yayının ölçüsünün yarısına eşittir. Yani, $m(\widehat{BAC}) = \frac{m(\overset{\frown}{BC})}{2}$ *dir.*

Bir çevre açının ölçüsü aynı yayı gören merkez açının ölçüsünün yarısına eşittir.

"Şekil 4.2.7" deki O merkezli çemberde $m(\widehat{BAC}) = \frac{m(\widehat{BOC})}{2} = \alpha$ *dır.*

Şekil 4.2.7

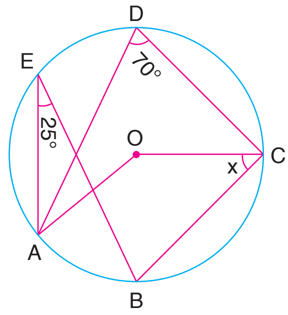


---

3. Örnek

"Şekil 4.2.8" deki O merkezli çemberde $m(\overset{\frown}{AEB}) = 25°$, $m(\overset{\frown}{ADC}) = 70°$ ve $m(\overset{\frown}{OCB}) = x$ olduğuna göre x açısının ölçüsünün kaç derece olduğunu bulalım.

Şekil 4.2.8



Çözüm

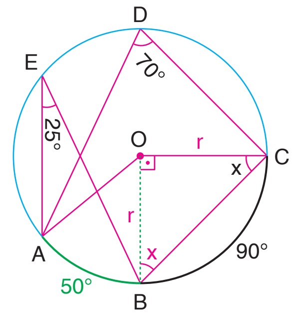
AEB ve ADC çevre açı olduklarından gördükleri yayların ölçüleri,

$m(\overset{\frown}{AB}) = 2.25° = 50°$ ve $m(\overset{\frown}{ABC}) = 2.70° = 140°$ olur. Bu durumda,

$m(\overset{\frown}{BC}) = m(\overset{\frown}{ABC}) - m(\overset{\frown}{AB}) = 140° - 50° = 90°$ olur.

"Şekil 4.2.9" daki gibi O ve B noktalarını birleştirelim. BOC merkez açı olduğundan, $m(\overset{\frown}{BOC}) = m(\overset{\frown}{BC}) = 90°$ dir.

Şekil 4.2.9



OBC üçgeni, $|OB| = |OC| = r$ olduğundan ikizkenar üçgendir. O hâlde,

$m(\overset{\frown}{OBC}) = m(\overset{\frown}{OCB}) = x$ dir.

Bu durumda, OBC üçgeninde

$x + x + 90° = 180° \Rightarrow 2x + 90° = 180°$

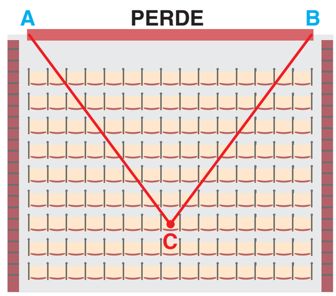
$\Rightarrow x = 45°$ bulunur.

4. Örnek

Günlük Hayat Bağlantısı

"Şekil 4.2.10" da bir sinema salonunun üstten görünümü modellenmiştir. Bu salonda C noktasındaki koltukta oturan kişi ile perdeyi aynı açıyla görmek isteyen iki kişinin hangi koltuklarda oturmaları gerektiğini bulalım.

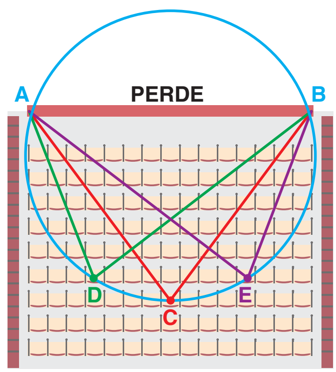
Şekil 4.2.10



Çözüm

C noktasındaki koltuk ile perdeyi aynı açıyla gören koltukları belirlemek için "Şekil 4.2.11" deki gibi perdeyi kiriş ve ACB açısını da çevre açı kabul eden çemberi çizelim.

Şekil 4.2.11



Çizdiğimiz bu çemberde perdeyi, başka bir deyişle AB kirişinin çember üzerinde oluşturduğu AB yayını gören iki koltuk D ve E noktalarındaki koltuklardır.

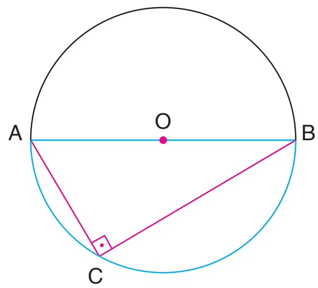
D ve E noktaları ADB ve AEB çevre açılarının köşeleridir. Aynı yayı gören çevre açıların ölçüleri birbirine eşit olacağından bu çevre açıların ölçüleri ACB açısının ölçüsüyle aynıdır. Buna göre D ve E noktalarında oturan iki kişi perdeyi C noktasındaki kişiyle aynı açıyla görür.

İnceleyelim

Aşağıda yapılanları inceleyelim.

a. Çapı gören çevre açının ölçüsünün 90° olduğunu gösterelim.

Şekil 4.2.12



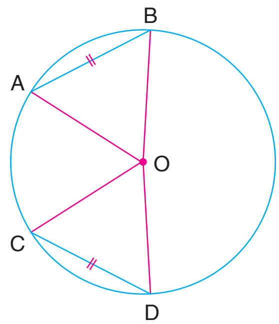
"Şekil 4.2.12"deki O merkezli çemberde [AB] çapını çizelim. Çap çemberi iki eş yaya böler. Buna göre çapın ayırdığı yayların ölçüleri 180° dir. ACB çevre açısı da 180° lik AB yayını gördüğünden,

$$m(\widehat{ACB}) = \frac{m(\widehat{AB})}{2} = \frac{180°}{2} = 90° \text{ dir.}$$

O hâlde bir çemberde çapı gören çevre açının ölçüsü 90° dir.

b. Eş kirişlerin ayırdığı yay parçalarının eş olduğunu gösterelim.

Şekil 4.2.13



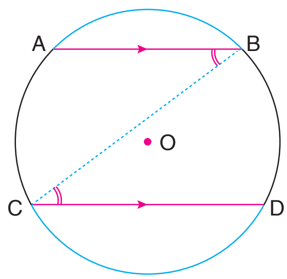
O merkezli bir çemberde [AB] ≅ [CD] verilmiş olsun. Bir çemberde çizilebilecek tüm yarıçaplar eştir.

Buna göre "Şekil 4.2.13"te verilen [AB] ≅ [CD] kirişlerine ek olarak [OA] ≅ [OB] ≅ [OC] ≅ [OD] yarıçaplarını çizelim. Yarıçapları çizdikten sonra oluşan AOB ve COD üçgenlerinin karşılıklı kenarları eş olacaktır. Bu durumda K.K.K. eşlik teoremine göre $\overset{\triangle}{AOB} \cong \overset{\triangle}{COD}$ dir.

Eş üçgenlerin karşılıklı açıları da eş olacağından $\widehat{AOB} \cong \widehat{COD}$ dir. Eş merkez açılar da eş yaylar göreceğinden $\widehat{AB} \cong \widehat{CD}$ bulunur.

c. Paralel kirişlerin arasında kalan yay parçalarının eş olduğunu gösterelim.

Şekil 4.2.14



O merkezli bir çemberde [AB] // [CD] verilmiş olsun. B ile C noktalarını bir doğru parçasıyla "Şekil 4.2.14"teki gibi birleştirelim. Bu durumda oluşan çevre açılar, iç ters açılar olduklarından $\widehat{ABC} \cong \widehat{BCD}$ olacaktır. Eş çevre açıların gördüğü yaylar da eş olacağından $\widehat{AC} \cong \widehat{BD}$ bulunur.

5. Örnek

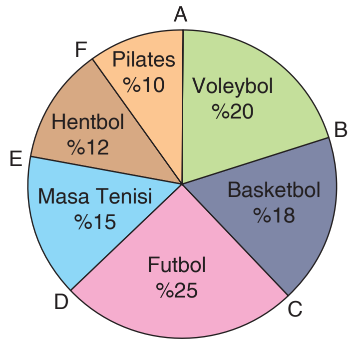
"Şekil 4.2.15"teki daire grafiği, bir spor okulundaki öğrencilerin sayılarının ilgilendikleri spor dallarına göre dağılımını göstermektedir. Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayalım.

a. Hentbola ait dilimin merkez açısının ölçüsü kaç derecedir?

b. Futbol diliminin belirttiği yayın ölçüsü, pilates diliminin belirttiği yayın ölçüsünden kaç derece daha fazladır?

c. $m(\overset{\frown}{FAB})$ kaç derecedir?

Şekil 4.2.15



Çözüm

"Şekil 4.2.15"teki daire grafiğinde dilimlerin bütündeki yüzde payları gösterilmiştir. Dilimlerin belirttiği merkez açıların ölçülerini bulmak için aşağıdaki işlemi yapabiliriz.

%100 ü yani tamamı $360°$ olan dilimin %1 i, $360° . \frac{1}{100} = 3,6°$ lik yay belirtir.

a. Hentbolun yüzdelik değeri %12 olduğundan dilimin belirttiği merkez açının ölçüsü, $3,6° . 12 = 43,2°$ bulunur.

b. Futbol diliminin yüzdelik değeri %25 ve pilates diliminin yüzdelik değeri %10 olduğundan bu dilimlerin belirttiği merkez açıların ölçüleri sırasıyla, $25 . 3,6° = 90°$ ve $10 . 3,6° = 36°$ dir.

Bir çemberde merkez açıların gördüğü yayların ölçüleri, merkez açının ölçüsüne eşit olacağından futbol diliminin belirttiği yayın ölçüsü, pilates diliminin belirttiği yayın ölçüsünden $90° - 36° = 54°$ daha fazla olduğu bulunur.

c. FAB yayını oluşturan iki dilim pilates ve voleyboldur. Bu iki dilim tüm dairenin toplamda %30 una denk gelmektedir. O hâlde %30 luk dilimin merkez açısının ölçüsü de $30 . 3,6° = 108°$ bulunur. Merkez açının ölçüsü gördüğü dilime eşit olduğundan $m(\overset{\frown}{FAB}) = 108°$ bulunur.

6. Örnek

Şekil 4.2.16



Cumhurbaşkanlığı Forsu pek çok anlam ve değeri bünyesinde barındırmakta; yüzlerce yılın birikimini, tarihteki Türk topluluklarını, dolayısıyla Türk birliğini ve Türkiye Cumhuriyeti'ni temsil etmektedir. Türk Bayrağı üzerine işlenen güneş ve çevresindeki 16 yıldızdan oluşan bölüme Cumhurbaşkanlığı Arması denilmektedir. "Şekil 4.2.16"daki Armanın ortasındaki güneş, sonsuzluğu yani Türkiye Cumhuriyeti'ni, bunun çevresindeki 16 yıldız ise tarihteki bağımsız 16 büyük Türk Devletini simgelemektedir.

Armanın etrafına bir çemberin üzerine gelecek biçimde dizilen yıldızlar aynı zamanda güneşin uzunlu kısalı ışınlarına da karşılık gelmektedir. Buna göre güneşin iki uzun ışını arasındaki açının ölçüsünün kaç derece olduğunu bulalım.

Çözüm

Şekil 4.2.17

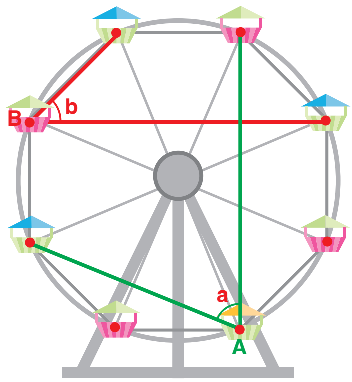


"Şekil 4.2.17" de yıldızların üzerine dizildiği çember gösterilmiştir. Tüm çember yayının üzerine 16 yıldız dizildiğinden iki yıldız arasında kalan çember yayının ölçüsü, $360° : 16 = 22{,}5°$ dir. Bu durumda güneşin iki uzun ışınının oluşturduğu merkez açının gördüğü yayın ölçüsü,
$22{,}5° . 2 = 45°$ dir. Merkez açının ölçüsü gördüğü yayın ölçüsüne eşit olacağından $x = 45°$ bulunur.

7. Örnek

"Şekil 4.2.18" de bir lunaparktaki eşit aralıklarla yerleştirilmiş 8 kabini bulunan dönme dolap modellenmiştir. Dönme dolabın A kabinindeki Ali'nin bakış açısı olan a ile B kabinindeki Bilge'nin bakış açısı olan b nin toplamının kaç derece olduğunu bulalım.

Şekil 4.2.18



Çözüm

Çember şeklindeki dönme dolabın üzerinde eşit aralıklarla yerleştirilmiş 8 kabinden ardışık iki tanesinin arasındaki yayın ölçüsü,
$360° : 8 = 45°$ dir.

A noktasındaki Ali'nin bakış açısının köşesi çember üzerinde olduğundan bu açı bir çevre açıdır. Ali, bu bakış açısıyla 4 kabin ve bunların arasındaki 3 yayı görür. Bu bakış açısı $3 . 45° = 135°$ lik açının ölçüsü gördüğü yayın ölçüsünün yarısı olacağından $a = 135° : 2 = 67{,}5°$ dir.

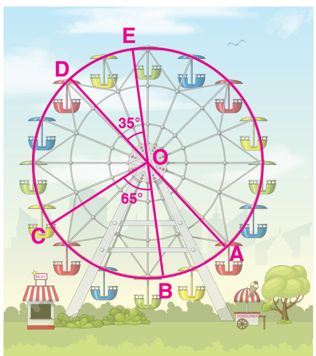
B noktasındaki Bilge de bu yaylardan 2 tanesini dolayısıyla $2 . 45° = 90°$ lik bir yayı görür. Bilge'nin çevre açı türündeki bakış açısının ölçüsü gördüğü yayın ölçüsünün yarısı olacağından $b = 90° : 2 = 45°$ dir.

Buna göre $a + b = 67{,}5° + 45° = 112{,}5°$ bulunur.

Proje: 114. sayfadaki projede "Projenin İçeriği" bölümündeki ikinci adımı gerçekleştirebilirsiniz.

2. Öğrendiklerimizi Uygulayalım

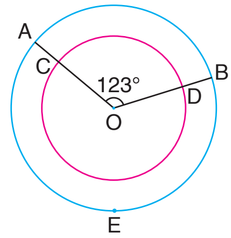
1. Yanda bir lunaparkta bulunan dönme dolap gösterilmiştir. Dönme dolabın üzerine çizilmiş çemberin merkezi O, [EB] ve [AD] çap, $m(\widehat{DOE}) = 35°$, $m(\widehat{BOC}) = 65°$ olduğuna göre aşağıda istenen ölçülerin kaç derece olduğunu bulunuz.



a. $m(\overset{\frown}{DC})$ **b.** $m(\overset{\frown}{ABC})$ **c.** $m(\overset{\frown}{CDE})$

d. $m(\overset{\frown}{ACE})$ **e.** $m(\overset{\frown}{CEA})$ **f.** $m(\overset{\frown}{AEB})$

2. Yandaki O merkezli iki çemberde $m(\widehat{AOB}) = 123°$ dir. Buna göre $m(\widehat{AEB}) + m(\widehat{CD})$ kaç derecedir?

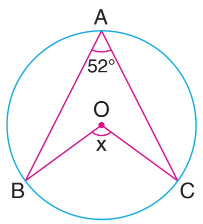


3. Yandaki saat kadranına konulmuş bir el feneri 8 ile 12 arasını aydınlatmaktadır. Buna göre el fenerinden çıkan ışınların oluşturduğu x açısının ölçüsü kaç derecedir?



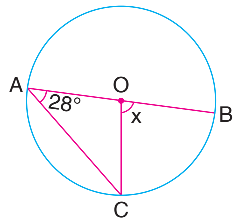
4. Aşağıdaki sorularda istenenleri bulunuz.

a.



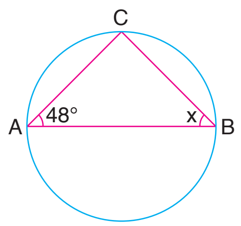
O merkezli çemberde $m(\widehat{BAC}) = 52°$ ise $m(\widehat{BOC}) = x$ kaç derecedir?

b.



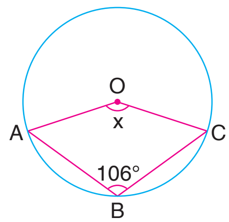
O merkezli, [AB] çaplı çemberde $m(\widehat{BAC}) = 28°$ ise $m(\widehat{COB}) = x$ kaç derecedir?

c.



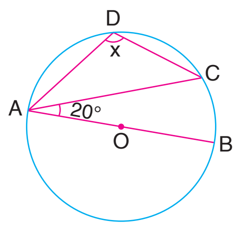
Yandaki [AB] çaplı çemberde $m(\widehat{CAB}) = 48°$ ise $m(\widehat{CBA}) = x$ kaç derecedir?

d.



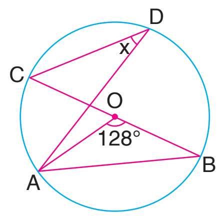
O merkezli çemberde $m(\widehat{ABC}) = 106°$ ise $m(\widehat{AOC}) = x$ kaç derecedir?

e.



O merkezli, [AB] çaplı çemberde $m(\widehat{CAB}) = 20°$ ise $m(\widehat{ADC}) = x$ kaç derecedir?

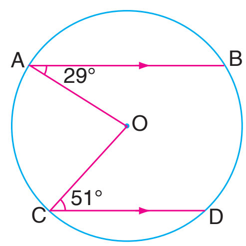
f.



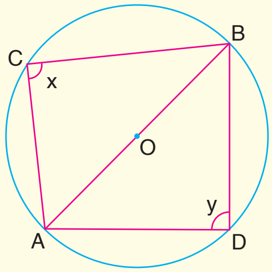
O merkezli, [BC] çaplı çemberde $m(\widehat{AOB}) = 128°$ ise $m(\widehat{CDA}) = x$ kaç derecedir?

5. Yandaki O merkezli çemberde [AB] // [CD], $m(\widehat{BAO}) = 29°$ ve $m(\widehat{DCO}) = 51°$ dir.

Buna göre $m(\widehat{BD})$ kaç derecedir?



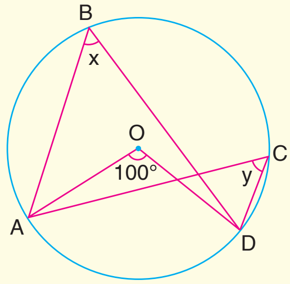
1.



Yukarıdaki O merkezli çemberde A, O ve B noktaları doğrusal değildir. $m(\overset{\frown}{BCA}) = x$ ve $m(\overset{\frown}{BDA}) = y$ olduğuna göre derece cinsinden birer tam sayı olan x ve y açılarının farkının negatif olmayan en küçük değeri kaç derecedir?

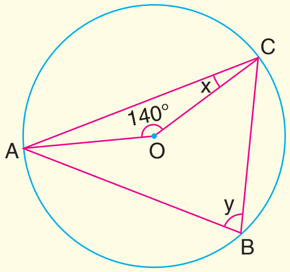
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

2.



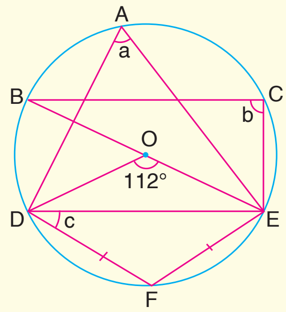
Yukarıdaki O merkezli çemberde $m(\overset{\frown}{ABD}) = x$, $m(\overset{\frown}{ACD}) = y$ ve $m(\overset{\frown}{AOD}) = 100°$ olduğuna göre $(x + y)$ nın kaç derece olduğunu bulunuz.

3.



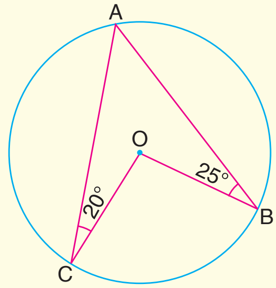
Yandaki O merkezli çemberde $m(\overset{\frown}{AOC}) = 140°$, $m(\overset{\frown}{ACO}) = x$ ve $m(\overset{\frown}{ABC}) = y$ olduğuna göre $(y - x)$ nın kaç derece olduğunu bulunuz.

4.



Yukarıdaki O merkezli çemberde [BE] çap, $|DF| = |FE|$, $m(\overset{\frown}{DOE}) = 112°$, $m(\overset{\frown}{DAE}) = a$, $m(\overset{\frown}{BCE}) = b$ ve $m(\overset{\frown}{FDE}) = c$ olduğuna göre $a + b + c$ kaç derecedir?

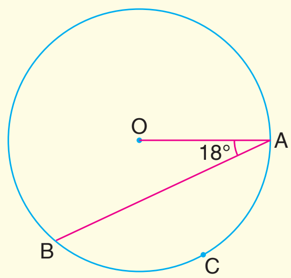
5.



Yukarıdaki O merkezli çemberde $m(\overset{\frown}{ACO}) = 20°$ ve $m(\overset{\frown}{ABO}) = 25°$ dir.

Buna göre $m(\overset{\frown}{CB})$ kaç derecedir?

6.



Yukarıdaki O merkezli çemberde $m(\overset{\frown}{OAB}) = 18°$ olduğuna göre $m(\overset{\frown}{ACB})$ kaç derecedir?

BÖLÜM 4.3

Hazır mısınız?

Bölüm 4.3 için Hazırlık Soruları

1. Çemberin çevresi ve dairenin alanıyla ilgili aşağıdaki ifadeler doğruysa boş kutulara "D", yanlışsa "Y" yazınız.

a. ☐ Bir çemberde yarıçap uzunluğu arttıkça çevre uzunluğu da artar.

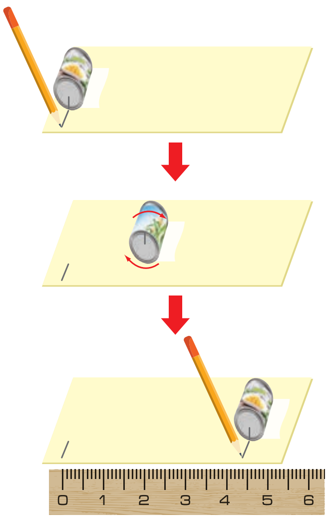
b. ☐ Çemberde 90° lik yayın uzunluğu tüm çemberin yarısıdır.

c. ☐ Bir dairenin yarıçapı iki katına çıkarılırsa alanı da iki katına çıkar.

d. ☐ Bir çemberde 60° lik çevre açının gördüğü yayın uzunluğu çemberin üçte biridir.

e. ☐ Bir dairenin alan değeri, yarıçap uzunluğuna bölünüp bulunan sonucun iki katı alınırsa dairenin çevre uzunluğu elde edilir.

2.



Buse'nin yukarıdaki ilk resimde silindir şeklindeki konserve kutusunun tabanına ve bu işaretin kâğıt üzerine denk gelen yerine işaret koyduğu görülmektedir. Ortadaki resimde konserve kutusunun yuvarlandığı gösterilmiştir. Son resimde de yuvarlanmaya başlayan konserve kutusunun üzerindeki işaret ilk kez kâğıt üzerine geldiğinde Buse kutuyu durdurup kâğıdı aynı hizadan işaretlemiştir. Son olarak iki işaret arasındaki mesafeyi ölçen Buse bulduğu sonuçla yaklaşık olarak hangi hesaplamayı yapmış olacaktır?

3. Aşağıdaki cümlelerdeki boşluklara gelmesi gereken ifadeleri parantez içlerinde verilenler arasından seçerek yazınız.

a. Bir çemberin çevre uzunluğu bulunurken çap uzunluğu .... (3 ile / π sayısı ile) çarpılır.

b. Kâğıttan kesilen iki eş daireden biri çapı boyunca kesilerek iki parçaya ayrılıyor. Bu durumda iki yarım dairenin çevre uzunluklarının toplamı, kesilmeyen diğer dairenin .... (çevre uzunluğuna eşittir. / çevre uzunluğundan büyüktür.)

c. Bir çemberde çevre uzunluğunun .... (yarıçap uzunluğuna / çap uzunluğuna) oranı π sayısına eşittir.

d. Bir dairenin alanı sayısal olarak, çap uzunluğunun π ile çarpımına eşit ise bu dairenin yarıçap uzunluğu .... (2 br / 4 br) dir.

4. Aşağıda yarıçap uzunluğu verilen dairelerin çevre ve alan ölçülerini, çevre ve alan ölçüleri verilen dairelerin de yarıçap uzunluklarını bulunuz.

a. r = 4 cm

Ç = ... cm

b. r = 10 cm

Ç = ... cm

c. r = ... cm

Ç = 18π cm

d. r = ... cm

Ç = 100π cm

e. r = 5 cm

A = ... cm^2

f. r = 11 cm

A = ... cm^2

g. r = ... cm

A = 225 cm^2

h. r = ... cm

A = 36π cm^2

BÖLÜM 4.3

DAİRENİN ÇEVRESİ ve ALANI

Dairenin Çevresi ve Alanı

Neleri Öğreneceğiz?

- Dairenin çevresi ve alanı ile ilgili işlemler yapabilmeyi,
- Daire diliminin alanını ve yay uzunluğunu hesaplayabilmeyi.

Günlük Hayat Bağlantısı

Günümüzde hızlı yemek kültürünün en ünlü yiyeceklerinden biri olan pizzanın anavatanı İtalya'dır. İtalya'dan Dünya'ya yayılan pizza için ortaya atılan bilgilerden biri, geçmişte yokluk zamanlarında kadınların bir hamur üzerine buldukları malzemeleri koyarak keşfedildiğidir.

Şekil 4.3.1



İki arkadaş iş yerinde mesaiye kaldıkları bir akşam yemek için pizza siparişi verecektir. Birisi 27 cm çapındaki pizzadan, diğeri ise aynı fiyata 17 cm çaplı pizzalardan iki tane sipariş etmeyi düşünüyor. Sizce bu durumda hangi arkadaş aynı paraya daha çok pizza yiyecektir?

Yarıçap uzunluğu r br olan dairenin çevre uzunluğu $Ç = 2\pi r$ br, alanı $A = \pi r^2$ br^2 dir.

---

1. Örnek

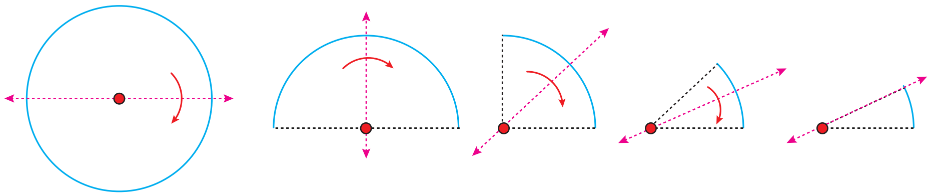
Pergel ile kâğıda çizeceğimiz yarıçap uzunluğu r olan çemberi kâğıttan keserek oluşan dairenin alan bağıntısının nasıl oluşturulduğunu inceleyelim.

Proje: 114. sayfadaki projede "Projenin İçeriği" bölümündeki üçüncü adımı gerçekleştirebilirsiniz.

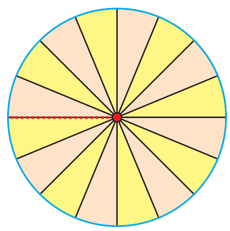
Çözüm

- Bir kâğıda cetvel ve pergel kullanarak yarıçap uzunluğu r olan bir çember çizelim.
- Çizdiğimiz çemberin çevrelediği daireyi kâğıttan makasla dikkatlice keserek çıkarttıktan sonra bu daireyi "Şekil 4.3.2"de gösterildiği gibi 4 kez katlayalım ve katladığımız kâğıdı açarak 16 eş daire dilimi elde edelim. Dairenin dilimlerini "Şekil 4.3.3"teki gibi renklendirelim.

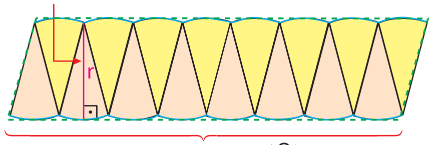
Şekil 4.3.2



Şekil 4.3.3



Şekil 4.3.4



- Daire dilimlerini kat yerlerinden keserek 16 eş daire dilimini "Şekil 4.3.4"teki gibi yan yana koyalım.
- Dilimlerin oluşturduğu şekli çevreleyen paralelkenarın yüksekliği r, taban uzunluğu da çember yayının yarısı olduğundan $\pi . r$ dir.
- Paralelkenarın alanı $\pi . r . r = \pi r^2$ dir.
- Daire ve paralelkenarın alanı birbirine eşit olacağından r yarıçaplı dairenin alan bağıntısı $\pi . r^2$ olarak bulunur.

Bu çözümde paralelkenar ile daire dilimlerin arasındaki boşluk ihmâl edilmiştir. Daire dilimlerinin sayısının arttıkça ihmâl edilecek alanın küçüleceğine dikkat ediniz.

2. Örnek

Dart iç içe yerleştirilmiş dairelerden oluşan hedefe, belirli bir mesafeden küçük okların atılmasıyla yapılan bir spordur. Dartın Orta Çağ'da İngiliz okçularının eğitimi için kullanıldığı söylenmektedir. "Şekil 4.3.5"te dart tahtasında eş iki küçük daire birbirine teğet, küçük daireler ile büyük daire şekildeki gibi içten teğettir. Küçük dairelerin çevre uzunluğu 6π cm dir.

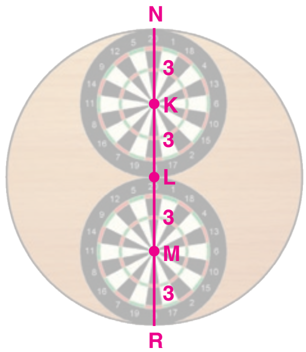
Şekil 4.3.5



Buna göre bir oyuncunun attığı okun isabet ettiği kahverengi bölgenin alanının kaç cm² olduğunu bulalım.

Çözüm

Şekil 4.3.6



"Şekil 4.3.6"da K ve M küçük dairelerin merkezleri, N, L ve R de teğet değme noktaları olsun. Bu durumda L, büyük dairenin merkezi ve [NR] de çapı olur.

Küçük dairelerin çevre uzunluğu 6π cm ise

$Ç = 2\pi r \Rightarrow 6\pi = 2.\pi.|NK|$

$\Rightarrow |NK| = 3$ cm dir.

O hâlde, $|NK| = |KL| = |LM| = |MR| = 3$ cm olur.

Bu durumda küçük dairelerin her birinin alanı $A = \pi 3^2 = 9\pi$ cm^2,

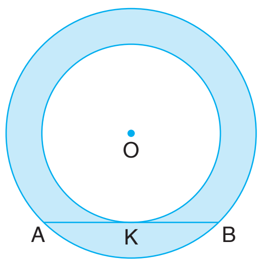
büyük dairenin alanı $B = \pi 6^2 = 36\pi$ cm^2 ve kahverengi bölgenin alanı da

$$S = B - 2A$$
$$= 36\pi - 2.9\pi$$
$$= 18\pi \text{ cm}^2 \text{ bulunur.}$$

2. Örnek

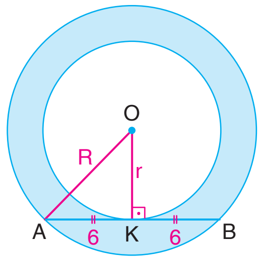
"Şekil 4.3.7"de $|AB| = 12$ br olmak üzere [AB] kirişi, O merkezli içteki çembere K noktasında teğettir. Buna göre mavi boyalı bölgenin alanının kaç br² olduğunu bulalım.

Şekil 4.3.7



Çözüm

Şekil 4.3.8



"Şekil 4.3.8" deki gibi O noktasından içteki çemberin [AB] teğetine [OK] yarıçapını ve büyük çemberin yarıçapı olan [OA] nı çizelim. Çemberin teğet değme noktasına çizilen yarıçapı teğete dik olacağından [OK] ⊥ [AB] dir. Ayrıca O merkezinden [AB] kirişine çizilen dikme kirişi iki eş parçaya ayırır.

Buna göre |AK| = |KB| = 6 br dir.

|OK| = r ve |OA| = R olsun. OKA dik üçgeninde Pisagor teoreminden,
$|OA|^2 = |OK|^2 + |AK|^2 \Rightarrow R^2 = 6^2 + r^2 \Rightarrow R^2 - r^2 = 36$ dır.

Mavi bölgenin alanı, dıştaki büyük dairenin alanından küçük dairenin alanının çıkarılmasıyla bulunur. Buna göre mavi boyalı bölgenin alanı

$\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(\underbrace{R^2 - r^2}_{36}) = 36\pi \text{ br}^2$ bulunur.

- *Bir çember yayı ile yayın uç noktalarını merkeze birleştiren iki yarıçapın arasında kalan bölgeye daire dilimi denir.*

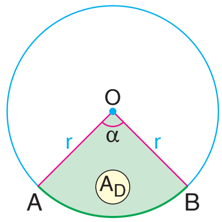
  Yarıçap uzunluğu r br ve merkez açısının ölçüsü α olan daire diliminin alanı,

  $A_D = \pi r^2 . \dfrac{\alpha}{360°}$ *br² dir.*

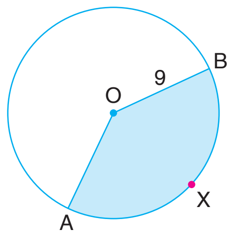
- *Burada AOB merkez açısının gördüğü AB yayının uzunluğu da*

  $|\overset{\frown}{AB}| = 2\pi r . \dfrac{\alpha}{360°}$ *br dir.*

Şekil 4.3.9



Şekil 4.3.10



3. Örnek

"Şekil 4.3.10" daki O merkezli çemberde |OB| = 9 br ve $|\overset{\frown}{AXB}| = 6\pi$ br olduğuna göre boyalı daire diliminin alanının kaç br² olduğunu bulalım.

Çözüm

"Şekil 4.3.10" da O merkezli daire diliminin merkez açısı α olsun.

$|\overset{\frown}{AXB}| = 2\pi . r . \dfrac{\alpha}{360°} \Rightarrow 6\pi = 2\pi . 9 . \dfrac{\alpha}{360°} \Rightarrow \alpha = 120°$ dir.

O hâlde boyalı daire diliminin alanı,

$A_D = \pi r^2 . \dfrac{\alpha}{360°} \Rightarrow A_D = \pi . 9^2 . \dfrac{120°}{360°} \Rightarrow A_D = 27\pi \text{ br}^2$ bulunur.

Alanı başka bir yolla daha bulalım.

Bir daire diliminin alanı dilimi çevreleyen yayın uzunluğu ile dairenin yarıçap uzunluğunun çarpımının yarısına eşittir. O hâlde,

$A_D = \dfrac{|\overset{\frown}{AXB}| . r}{2} \Rightarrow A_D = \dfrac{6\pi . 9}{2} = 27\pi \text{ br}^2$ bulunur.

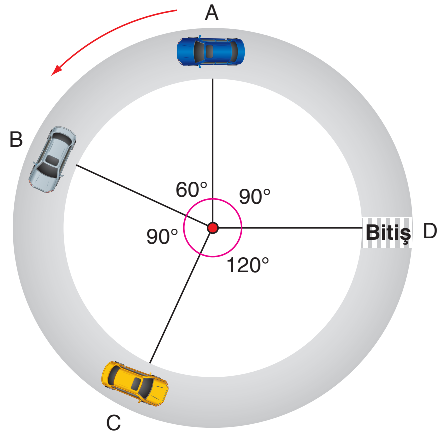
UYARI

"Şekil 4.3.10" daki daire diliminin alanı, $A_D = \dfrac{|\overset{\frown}{AXB}| . r}{2}$ ile de bulunabilir.

4. Örnek

"Şekil 4.3.11"de yarıçap uzunluğu 120 cm olan dairesel bir oyuncak yarış pistinde yarışa başlamış olan A, B ve C araçlarının anlık konumu ve bazı merkez açı ölçüleri verilmiştir. Buna göre araçların her birinin yarışı bitirmek için kaçar cm yollarının kaldığını bulalım.

Şekil 4.3.11



Çözüm

A aracının yarışı bitirmesi için pistin 270° lik $|\overset{\frown}{ABD}|$ yolunu alması gerekir. Bu yolun uzunluğu,

$$|\overset{\frown}{ABD}| = 2\pi . 120 . \frac{270°}{360°} \Rightarrow |\overset{\frown}{ABD}| = 240\pi . \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow |\overset{\frown}{ABD}| = 180\pi \text{ cm dir.}$$

B aracının yarışı bitirmesi için pistin 210° lik $|\overset{\frown}{BCD}|$ yolunu alması gerekir.

Bu yolun uzunluğu,

$$|\overset{\frown}{BCD}| = 2\pi . 120 . \frac{210°}{360°} \Rightarrow |\overset{\frown}{BCD}| = 240\pi . \frac{7}{12}$$

$$\Rightarrow |\overset{\frown}{BCD}| = 140\pi \text{ cm dir.}$$

C aracının yarışı bitirmesi için pistin 120° lik $|\overset{\frown}{CD}|$ yolunu alması gerekir.

Bu yolun uzunluğu,

$$|\overset{\frown}{CD}| = 2\pi . 120 . \frac{120°}{360°} \Rightarrow |\overset{\frown}{CD}| = 240\pi . \frac{1}{3}$$

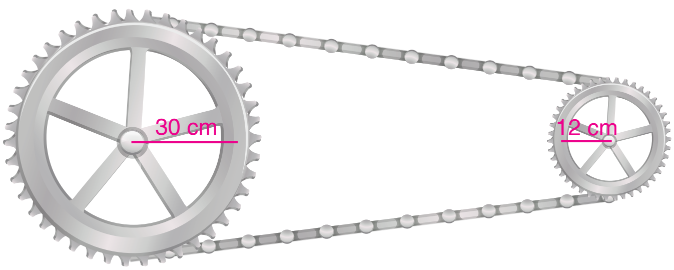
$$\Rightarrow |\overset{\frown}{CD}| = 80\pi \text{ cm dir.}$$

114. sayfadaki projede "Projenin İçeriği" bölümündeki dördüncü adımı gerçekleştirebilirsiniz.

5. Örnek

"Şekil 4.3.12"de birbirine zincirle bağlı iki dişli çark gösterilmiştir. Yarıçap uzunluğu 30 cm olan büyük dişli çark 120° döndürüldüğünde yarıçap uzunluğu 12 cm olan küçük dişli çarkın kaç derecelik dönme yapacağını bulalım.

Şekil 4.3.12



Çözüm

Birbirine zincir ile bağlı çarklardan birinin üzerindeki bir nokta ne kadar yol alırsa diğer çark üzerindeki bir nokta da o kadar yol alacaktır. Bu durumda $120°$ dönen büyük çarkın dönme miktarı olan $Ç_1$ uzunluğunu bulalım.

$$Ç_1 = 2\pi . r . \frac{\alpha}{360°} \Rightarrow Ç_1 = 2\pi . 30 . \frac{\cancel{120°}^{\,1}}{\cancel{360°}_{\,3}} \Rightarrow Ç_1 = 20\pi \text{ cm bulunur.}$$

Bu durumda küçük çarkın kaç derecelik dönme sonucunda üzerindeki bir noktanın 20π cm uzunluğunda yol alacağını bulalım.

$$20\pi = 2\pi . r . \frac{\alpha}{360°} \Rightarrow 20\pi = 2\pi . 12 . \frac{\alpha}{360°}$$

$$\Rightarrow 20\pi = \frac{24\pi . \alpha}{360°}$$

$$\Rightarrow 7200\pi = 24\pi . \alpha$$

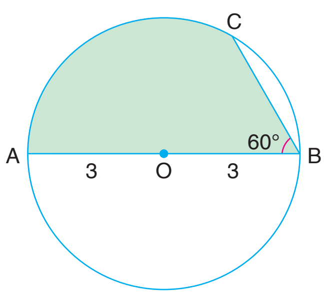
$$\Rightarrow \alpha = \frac{7200\pi}{24\pi}$$

$$\Rightarrow \alpha = 300° \text{ bulunur.}$$

6. Örnek

"Şekil 4.3.13" te verilen O merkezli dairenin yarıçap uzunluğu 3 cm ve $m(\widehat{CBA}) = 60°$ olduğuna göre boyalı bölgenin alanının kaç cm^2 olduğunu bulalım.

Şekil 4.3.13



Çözüm

"Şekil 4.3.14" teki gibi O ve C noktalarını birleştirirsek oluşan COB üçgeninde $|OC| = |OB| = 3$ cm ve $m(\widehat{CBO}) = 60°$ olduğundan COB eşkenar üçgendir.

Buradan $m(\widehat{AOC}) = 120°$ bulunur.

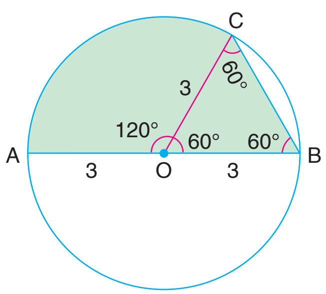
O hâlde boyalı bölgenin alanı COB eşkenar üçgeninin alanı ile $120°$ lik daire diliminin alanlarının toplamına eşittir.

Bu durumda boyalı alan,

$$\frac{\alpha}{360°} . \pi r^2 + A(\widehat{COB}) = \frac{120°}{360°} . \pi . 3^2 + \frac{3^2 . \sqrt{3}}{4}$$

$$= \left(3\pi + \frac{9\sqrt{3}}{4}\right) \text{cm}^2 \text{ bulunur.}$$

Şekil 4.3.14



UYARI

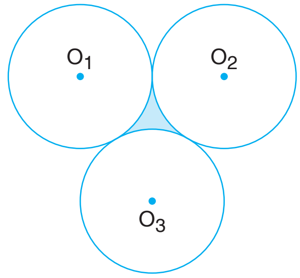
Bir kenar uzunluğu a br olan eşkenar üçgenin alanı,

$A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ br^2 dir.

7. Örnek

"Şekil 4.3.15" te O_1, O_2 ve O_3 merkezli çemberler birbirlerine dıştan teğettir. Bu çemberlerin yarıçap uzunlukları 3 br olduğuna göre mavi boyalı bölgenin alanının kaç br^2 olduğunu bulalım.

Şekil 4.3.15



Çözüm

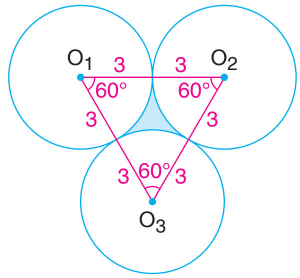
"Şekil 4.3.16" da O_1, O_2 ve O_3 merkezleri doğru parçalarıyla birleştirilirse $|O_1O_2| = |O_1O_3| = |O_2O_3| = 6$ br olduğundan $O_1O_2O_3$ üçgeni eşkenar üçgen olur. Buna göre boyalı bölgenin alanını, eşkenar üçgenin alanından 60° lik üç daire diliminin alanını çıkararak bulabiliriz. O hâlde boyalı bölgenin alanı,

$$A(O_1\widehat{O_2}O_3) - 3.\pi.3^2.\frac{60°}{360°} = \frac{|O_1O_2|^2.\sqrt{3}}{4} - 3.\frac{9\pi}{6}$$

$$= 9\sqrt{3} - \frac{9\pi}{2}$$

$$= 9\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)\text{br}^2 \text{ bulunur.}$$

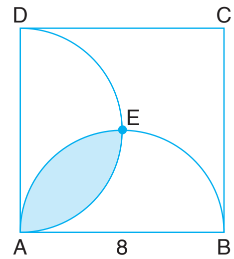
Şekil 4.3.16



8. Örnek

"Şekil 4.3.17" de ABCD karesinin içerisine çizilen [AB] ve [AD] çaplı yarım çemberler gösterilmiştir. |AB| = 8 br olduğuna göre mavi boyalı bölgenin alanının kaç br^2 olduğunu bulalım.

Şekil 4.3.17



Çözüm

"Şekil 4.3.18" de O_1 ve O_2 noktaları yarım çemberlerin merkezleri olsun. AO_2EO_1 kare olacağından [AE] köşegeni çizildiğinde boyalı bölge iki eş parçaya bölünmüş olur.

Bu eş parçalardan birinin alanı O_2 merkezli çeyrek dairenin alanından EO_2A dik üçgeninin alanının çıkarılmasıyla bulunur.

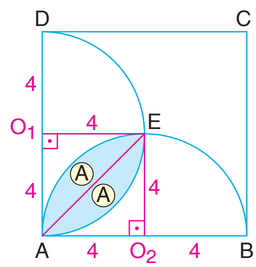
$$A = \pi.4^2.\frac{90°}{360°} - \frac{|EO_2|.|AO_2|}{2}$$

$$= 16\pi.\frac{1}{4} - \frac{4.4}{2}$$

$$= (4\pi - 8)\text{ br}^2 \text{ olur.}$$

O hâlde mavi boyalı bölgenin alanı, $2.A = (8\pi - 16)$ br^2 bulunur.

Şekil 4.3.18



114. sayfadaki projede "Projenin Sunum Süreci" ni tamamlayarak projeyi sunuma hazır hâle getiriniz.

3. Öğrendiklerimizi Uygulayalım

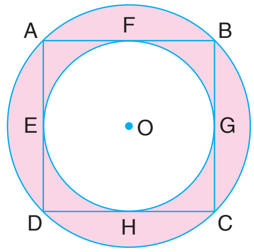
1. "Şekil 4.3.19" daki iç içe geçmiş dairelerden oluşmuş dart tahtasının çevre uzunluğu 40π cm dir. İç içe bulunan her bir dairenin yarıçap uzunluğu bir içtekinden 4 cm büyüktür. Buna göre tahtanın kırmızı bölgesine isabet eden bir okun isabet etmiş olabileceği toplam alanın kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

Şekil 4.3.19



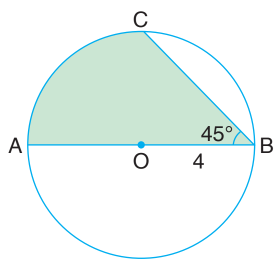
2. "Şekil 4.3.20" deki ABCD karesi O merkezli küçük daireye E, F, G ve H noktalarında teğettir. Alanı 16 br^2 olan ABCD karesinin köşeleri de O merkezli büyük çemberin üzerindedir. Buna göre iki çember arasında kalan pembe boyalı halkanın alanının kaç br^2 olduğunu bulunuz.

Şekil 4.3.20



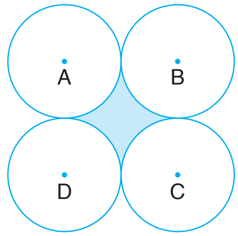
3. Yarıçap uzunluğu 10 cm olan bir dairede bir dilimin alanı 25π cm^2 olduğuna göre dilimi çevreleyen yayın uzunluğunun kaç cm olduğunu iki farklı yolla bulunuz.

Şekil 4.3.21



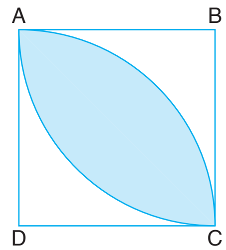
4. "Şekil 4.3.21" de verilen O merkezli dairenin yapıçap uzunluğu 4 cm ve $m(\widehat{CBA}) = 45°$ dir. Buna göre yeşil boyalı bölgenin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

Şekil 4.3.22



5. "Şekil 4.3.22" deki A, B, C ve D merkezli eş çemberler birbirine dıştan teğet ve yarıçap uzunlukları 4 br olduğuna göre mavi boyalı bölgenin alanının kaç br^2 olduğunu bulunuz.

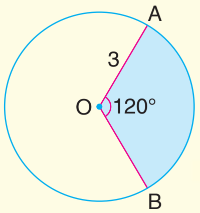
Şekil 4.3.23



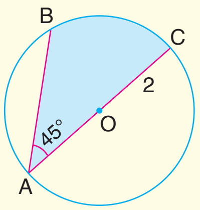
6. "Şekil 4.3.23" te kenar uzunluğu 6 cm olan ABCD karesinin içine B ve D merkezli çeyrek çemberler çizilmiştir. Buna göre çember yaylarının arasında kalan mavi boyalı bölgenin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

1. Aşağıdaki O merkezli dairelerde boyalı bölgelerin alanlarını sağdaki sütundan bularak dairelerle eşleştiriniz.

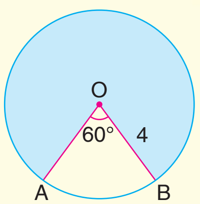
a.



b.



c.



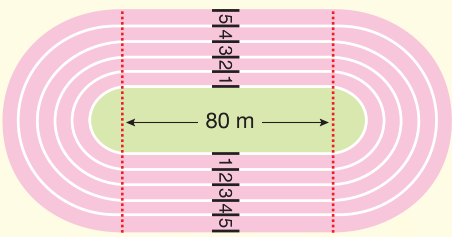
I. 3π br^2

II. $\dfrac{40\pi}{3}$ br^2

III. $\dfrac{\pi}{4} + 2\sqrt{2}$ br^2

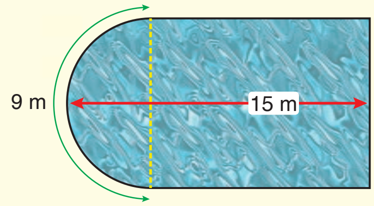
IV. $\pi + 2$ br^2

2.



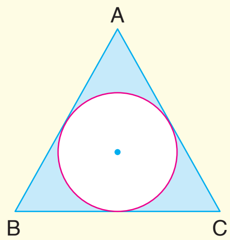
Yukarıdaki şekilde bir stadyumun zemininin üstten görüntüsü verilmiştir. Tüm zemin, bir dikdörtgensel bölge ve birbirine eş iki yarım dairenin şekildeki gibi birleşiminden oluşmaktadır. Zeminin yeşille belirtilen kısmı çim sahadır. 1, 2, 3, 4 ve 5 rakamlarıyla belirtilen kısımları da sahanın her yerinde her birinin genişliği 1 m olan koşu yollarıdır. Zeminin dikdörtgensel bölge şeklindeki bölümünün uzunluğu 80 m, çim sahanın çevre uzunluğu 208 m olduğuna göre pembe ile belirtilen koşu yollarının toplam alanı kaç m^2 dir?
($\pi = 3$ alınız)

3.

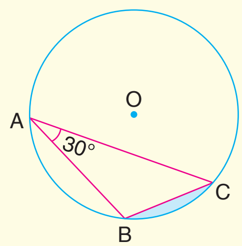


Yukarıda verilen şekildeki havuzun yüzeyi bir yarım daire ile bir dikdörtgenin birleşiminden oluşmaktadır. Şekilde verilen yarım dairenin yay uzunluğu 9 m ve havuzun en uzak iki noktasının arasındaki uzaklık 15 m olduğuna göre havuzun tabanının alanı kaç m^2 dir? ($\pi = 3$ alınız.)

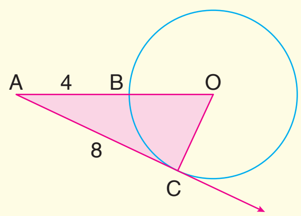
4. Şekildeki ABC eşkenar üçgeninin içine, tüm kenarlarına teğet olan bir çember yerleştirilmiştir. $|AB| = 4\sqrt{3}$ br olduğuna göre mavi boyalı bölgenin alanı kaç br^2 dir?



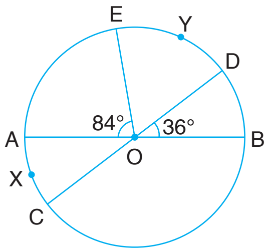
5. Şekildeki O merkezli çemberin yarıçap uzunluğu 6 br, $m(\widehat{BAC}) = 30°$ olduğuna göre mavi boyalı bölgenin alanı kaç br^2 dir?



6. Şekildeki [AC, O merkezli çembere C noktasında teğettir. AOC üçgeninde $|AB| = 4$ br, $|AC| = 8$ br olduğuna göre $A(\widehat{AOC})$ kaç br^2 dir?



1.

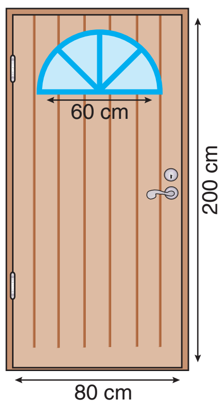


Şekildeki O merkezli çemberin yarıçap uzunluğu 4 cm, A, O, B ile C, O, D kendi aralarında doğrusal, $m(\widehat{DOB}) = 36°$, $m(\widehat{EOA}) = 84°$ olduğuna göre $|\widehat{AXC}| + |\widehat{EYD}|$ kaç cm dir?

A) $\frac{16\pi}{15}$ B) $\frac{32\pi}{15}$ C) $\frac{18\pi}{5}$

D) $\frac{16\pi}{5}$ E) $\frac{16\pi}{3}$

Yandaki şekilde Zeynep'in odasının kapısı görülmektedir. Tahtadan yapılmış dikdörtgensel kapının yarım daire şeklinde 4 eş dilime ayrılmış bir camı bulunmaktadır. Dairenin çapı 60 cm, kapının kısa ve uzun kenar uzunlukları sırasıyla 80 cm ve 200 cm dir.



Bu bilgilere göre 2 ve 3. soruları cevaplayınız.
($\pi = 3$ alınız.)

2. Camın yüzey alanı kaç cm^2 dir?

A) 1200 B) 1250 C) 1350

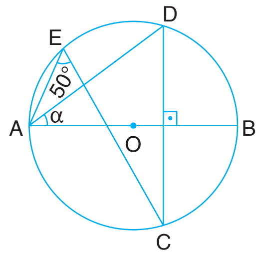
D) 1400 E) 1550

3. Kapının tahtadan oluşan kısmının yüzey alanı kaç m^2 dir?

A) 1,175 B) 1,225 C) 1,255

D) 1,375 E) 1,465

4.

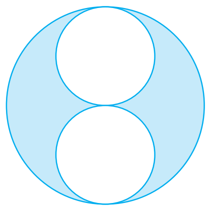


Şekilde O noktası çemberin merkezi, $[AB] \perp [CD]$, $m(\widehat{AEC}) = 50°$, $m(\widehat{DAB}) = \alpha$ dır.

Yukarıdaki verilere göre α kaç derecedir?

A) 20 B) 30 C) 40 D) 50 E) 60

5. Yarıçap uzunluğu 3 cm olan iki eş çember birbirine dıştan ve bu iki çemberi içine alan büyük çembere içten şekildeki gibi teğettir.



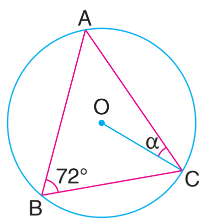
Buna göre boyalı bölgenin alanı kaç cm^2 dir?
($\pi = 3$ alınız.)

A) 54 B) 56 C) 60 D) 64 E) 72

6. Şekilde O noktası çemberin merkezi,

$m(\widehat{ABC}) = 72°$ ve

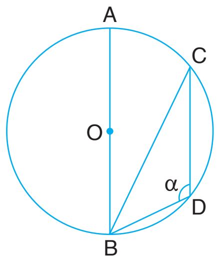
$m(\widehat{ACO}) = \alpha$ dır.



Yukarıdaki verilere göre α kaç derecedir?

A) 16 B) 18 C) 20 D) 24 E) 36

7.



Şekilde O noktası çemberin merkezi,

$[AB] \parallel [CD]$, $2.m(\widehat{CBD}) = 5.m(\widehat{BCD})$

ve $m(\widehat{BDC}) = \alpha$ dır.

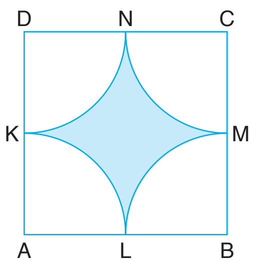
Yukarıdaki verilere göre α kaç derecedir?

A) 100 B) 102 C) 108 D) 110 E) 120

8. **Yarıçap uzunluğu 12 cm olan bir çemberde α derecelik merkez açının gördüğü yayın uzunluğu 6π cm olduğuna göre α kaç derecedir?**

A) 60 B) 75 C) 90 D) 100 E) 120

9.



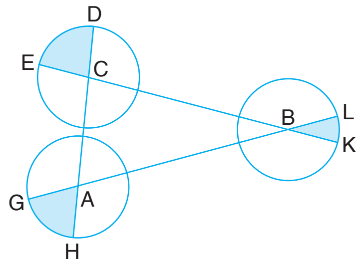
Şekilde ABCD kare ve $|AB| = 4$ br dir.

ABCD karesinin içerisinde A, B, C, D merkezli birbirine eş çeyrek çemberler çizildiğine göre boyalı bölgenin alanı kaç br^2 dir?

A) $4 - \pi$ B) $8 - \pi$ C) $8 - 2\pi$

D) $16 - 2\pi$ E) $16 - 4\pi$

10.



Şekildeki ABC üçgeninin köşelerine A, B, C merkezli ve x br yarıçaplı çemberler çizilip bu çemberlerde mavi ile boyanan daire dilemleri oluşturulmuştur. Buna göre bu daire dilimlerinin alanları toplamının x e bağlı değeri aşağıdakilerden hangisidir?

(E, C, B ve K; D, C, A ve H; G, A, B ve L kendi arasında doğrusaldır.)

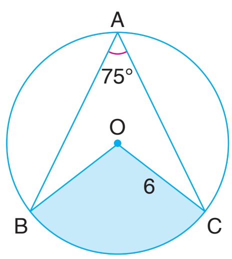
A) πx^2 br^2 B) $\dfrac{\pi x^2}{2}$br^2 C) $\dfrac{\pi x^2}{3}$br^2

D) $\dfrac{\pi x^2}{4}$br^2 E) $\dfrac{\pi x^2}{6}$br^2

11. **Bir çemberde, 36° lik merkez açının gördüğü yayın uzunluğu π cm ise bu çemberin yarıçap uzunluğu kaç cm dir?**

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

12.



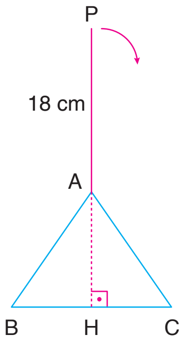
Şekilde O noktası çemberin merkezi,

$m(\widehat{BAC}) = 75°$ ve $|OC| = 6$ br dir.

Yukarıdaki verilere göre boyalı alan kaç br^2 dir?

A) 4π B) 6π C) 8π D) 10π E) 15π

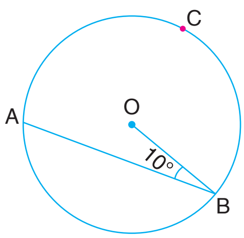
13. Şekilde verilen 18 cm uzunluğundaki AP ipi gergin durumda tutularak çevresinin uzunluğu 18 cm olan ABC eşkenar üçgeni biçimindeki levhanın etrafına saat yönünde döndürülerek sarılıyor.



[PH] ⊥ [BC] olduğuna göre ipin ucu P noktasından A köşesine geldiğinde ipin taradığı alan kaç cm^2 olur?

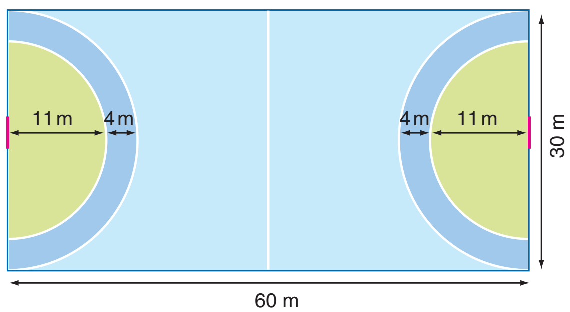
A) 175π B) 180π C) 185π
D) 190π E) 195π

14. Şekildeki O merkezli çemberde $m(\widehat{OBA}) = 10°$ dir.



Buna göre, ACB yayının ölçüsü kaç derecedir?

A) 190 B) 200 C) 220 D) 240 E) 260



Yukarıdaki şekilde yapım aşamasındaki dikdörtgensel buz pateni pisti gösterilmiştir. Pistin iki tarafında ortadaki beyaz çizgiye göre simetrik olan yarım daire şeklinde süslemeler mevcuttur.

Pistin kısa ve uzun kenar uzunlukları sırasıyla 30 m ve 60 m, küçük dairenin yarıçap uzunluğu 11 m ve 2 dairenin sınırları arasındaki mesafe de 4 m olduğuna göre 16, 17, 18 ve 19. soruları cevaplayınız *(π = 3 alınız.)*.

15. Çizgilerin kalınlığı önemsenmeyeceğine göre pistin açık mavi ile gösterilen bölgesinin alanı kaç m^2 dir?

A) 1800 B) 1750 C) 1425
D) 1300 E) 1125

16. Pistin yeşil ile gösterilen bölgelerinin alanlarının toplamı kaç m^2 dir?

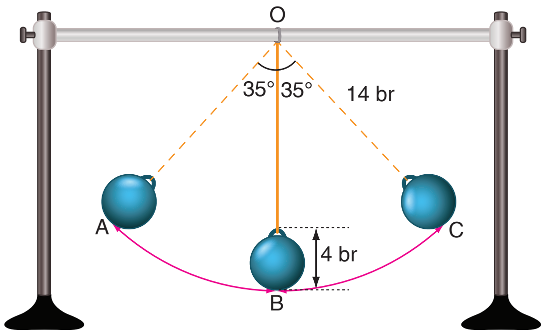
A) 363 B) 387 C) 432 D) 444 E) 456

17. Pistin kısa kenarlarında süsleme için kullanılan yarım çemberlerin arasında kalan dairesel halkaların (koyu mavi ile boyalı bölgeler) alanlarının toplamı kaç m^2 dir?

A) 312 B) 344 C) 356 D) 388 E) 404

18. Pist yapılırken çizilen beyaz çizgilerin toplam uzunluğu kaç m dir?

A) 216 B) 186 C) 156 D) 120 E) 96



Yukarıdaki şekilde 14 br uzunluğundaki ipe bağlanmış demir bilye ile oluşturulmuş sarkaç düzeneği gösterilmiştir. [OB] konumunda serbest duran sarkaç 35° çekilip bırakıldığında ABC yayı boyunca salınım yapmaktadır.

Bu bilgilere göre 20 ve 21. soruları cevaplayınız.

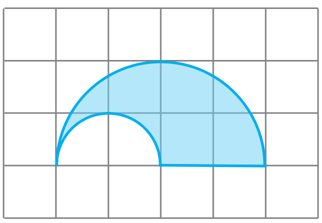
19. **O noktasında bağlı sarkacın uç noktasının salındığı ABC yayının uzunluğu kaç birimdir?**

A) $\frac{5}{2}\pi$ B) 5π C) $\frac{7}{2}\pi$ D) 7π E) 14π

20. **O noktasına bağlı ipin salınım yaparken süpürdüğü bölgenin alanı kaç br^2 dir?**

A) 7π B) $\frac{7}{9}\pi$ C) $\frac{49}{3}\pi$ D) 63π E) $\frac{343}{9}\pi$

21.

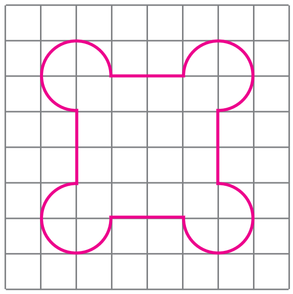


Yukarıdaki birim kareli kâğıt üzerindeki kapalı şekil, iki yarım çember yayı ve bir doğru parçası ile oluşturulmuştur.

Buna göre mavi boyalı şeklin alanı kaç br^2 dir? *(π = 3 alınız.)*

A) 11 B) 9 C) 5,5 D) 4,5 E) 3

22.

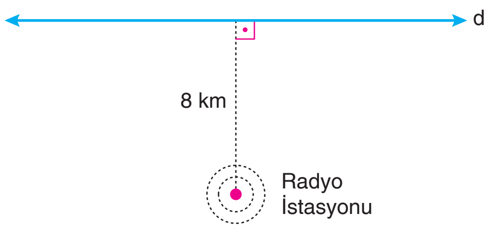


Yukarıdaki birim kareli kâğıt üzerindeki şekil, bir kare ve merkezleri karenin köşelerinde olan daire dilimlerinin birleşimiyle oluşturulmuştur.

Buna göre şeklin çevre uzunluğu kaç birimdir? *(π = 3 alınız.)*

A) 17 B) 18 C) 21 D) 24 E) 26

23.



Şekilde gösterilen d doğrusu boyunca uzanan otoyola en kısa uzaklığı 8 km olan bir radyo istasyonu bulunmaktadır. Bu radyo istasyonundan yapılan yayın, istasyondan tüm yönlere doğru 12 km mesafeye kadar dinlenebilmektedir. Buna göre bu otoyolun üzerinde seyreden bir araç en çok kaç km lik mesafede radyo istasyonundan yapılan yayını dinleyebilir?

A) 8 B) $8\sqrt{5}$ C) 12

D) $12\sqrt{5}$ E) 16

1. ALT ÖĞRENME ALANI

Bölüm 1.1. Hazır mısınız?

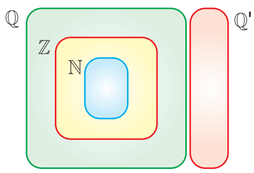
1. a, b ve c seçeneklerinde cevaplar farklılık gösterebilir.
   d. 0

2. E 3. 2

4. 0 5. B 6. 940910960

7. a. 7, 22
   b. 1, 9, 13
   c. 8, −4, −16

1. Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. 

2. Yalnız II

2. Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. a. I. 

   II. 

   b. I. 2217 II. 439

2. 45 3. 80 4. 1776

3. Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. 325 2. 145

3. 5 4. 10

1.1 Konu Sonu Değerlendirme Soruları

1. a. Y b. D c. D d. D
   e. D f. Y

2. 0 ve $\sqrt{16}$ → Doğal sayı
   $-1, \bar{1}$ → Rasyonel sayı
   $3\sqrt{5}$ → İrrasyonel sayı
   $\sqrt{-4}$ → Karmaşık sayı

3. A 4. D

5. x = i ve x = i çözümler $\mathbb{C}$ nin elemanlarıdır.

6. a, b ve c 7. C 8. D

9. 19 10. B 11. B

Bölüm 1.2. Hazır mısınız?

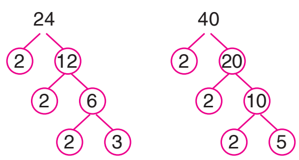
1. 2 2. a. 9 b. 5 c. 9

3. 2 4. 102, 108, 114, 126

5. 720, 1050 ve 3750

6. Cevaplar farklılık gösterebilir.

7. 12 → 1, 2, 3, 4, 6, 12
   20 → 1, 2, 4, 5, 10, 20
   36 → 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36
   75 → 1, 3, 5, 15, 25, 75

8. 

9. A = 36, B = 3, C = 3
   M = 2, N = 7, P = 7

4. Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. a. 3, 5 b. 3, 5
   c. 2, 5, 11 d. 2, 4
   e. 2, 3, 9, 11 f. 2, 4, 11

2.

	3 ile	5 ile	9 ile
a	2	1	8
b	2	3	5
c	0	3	0
d	0	4	3
e	1	4	7
f	2	2	8

3. 3 4. 18

5.

	75	80	156	237	256	1020	1326	1340	1755	2223	7368	46 440	57 825
2		X	X		X	X	X	X			X	X	
3	X		X	X		X	X		X	X	X	X	X
4		X	X		X	X		X			X	X	
5	X	X				X		X	X			X	X
6			X			X	X				X	X	
9									X	X		X	X
11													

5. Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. 2 2. 21

3. a. 3 b. 3 c. 2 d. 4

4. a. 8 b. 12 c. 15 d. 32

5. 15 6. 10 7. 12 8. 2

9. 36 10. a. 6 b. 12

11. 30 12. 57

1.2 Konu Sonu Değerlendirme Soruları

1. a. Yalnız 2 b. Yalnız 5
   c. 2, 3 ve 9 d. 3 ve 9
   e. 3 ve 11 f. 2, 3, 4 ve 11

2.

	3 ile	5 ile	9 ile
a	0	4	6
b	0	3	0
c	2	0	8
d	2	2	5
e	0	3	6
f	0	2	0

3. a. D b. D c. D d. Y

4. B 5. 12 6. 4

7. a. Y b. Y c. Y d. Y e. D

8. a. $2^3.11$ → 8 tane
   b. $2^5.3$ → 12 tane
   c. $2^2.3^2.5$ → 18 tane
   d. $2^7.5$ → 16 tane

9. E 10. C 11. 4 12. 10

1. Alt Öğrenme Alanı Testi

1. D 2. B 3. B 4. E
5. D 6. E 7. C 8. A
9. D 10. C 11. C 12. B
13. A 14. C 15. E 16. D
17. C 18. D 19. A 20. B
21. D 22. D 23. B 24. C
25. D 26. A 27. D 28. B

2. ALT ÖĞRENME ALANI

Bölüm 2.1. Hazır mısınız?

1. II, III ve IV 2. I, II ve III

3. 7,5 4. 6 5. $3\sqrt{5}$

3.

Açı / Trigo-nomet-rik Oran	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
cot	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

7. I. $\frac{4}{5}$ II. cotα, tanβ
III. cosα, $\frac{4}{5}$ IV. tanα, cotβ

8. a. sin b. 33, tan c. 86
d. cos 45 e. cos, 55 f. tan 11

1. Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. 54 2. 160 3. $4+\sqrt{21}$

4. 5–12–13 5. 4 6. güvenlidir.

7. 20

8. Kenar: $\sqrt{17}$, Köşegen: $\sqrt{34}$

9. Cevaplar farklılık gösterebilir.

10. $10\sqrt{61}$ 11. $3\sqrt{2}$ 12. 51

2. Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. 41 2. 90 3. 60 4. 13
5. 2 6. 384 7. 60 8. 45
9. 41 10. 34,4

3. Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. 11,2 2. 360 3. 11,25
4. 3,6 5. 80 cm 6. 18
7. 24 m

2.1 Konu Sonu Değerlendirme Soruları

1. a. Y b. Y c. D d. Y
e. D f. D g. Y h. Y

2. 15 3. 12 4. B 5. B

6. Yalnız C 7. B 8. E 9. C

10. D 11. C 12. D 13. E

14. B 15. A 16. B 17. A

18. D 19. E 20. A 21. C

22. D

2. Alt Öğrenme Alanı Testi

1. C 2. A 3. E 4. D
5. A 6. D 7. B 8. B
9. A 10. C 11. E 12. A
13. C 14. D 15. B 16. C
17. C 18. E 19. D 20. D
21. E

3. ALT ÖĞRENME ALANI

Bölüm 3.1. Hazır mısınız?

1. a. $\varnothing$ b. $\{0\}$ c. $\{14\}$
d. $\varnothing$ e. $\{1\}$ f. $\mathbb{R}$

2. a, c ve d nin çözümüdür.

3. a. $\left\{-\frac{18}{13}\right\}$ b. $\{7\}$
c. $\{2\}$ d. $\left\{-\frac{9}{2}\right\}$

4. a ↔ III, b ↔ V, c ↔ I, d ↔ II
e ↔ VIII, f ↔ VII, g ↔ VI

5. a, b, c ve d

6. a. $\leq$ b. $>$ c. $>$
d. $>$ e. $\leq$ f. $>$ ve $<$

1. Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. 1,5 2. 11

3. a. 39,2 b. $x=\frac{5T-16}{9}$ c. 5

4. 3 5. 7344 6. $\frac{51}{14}$ 7. 500

8. kalem = 1,5 TL, kalemtıraş = 1,25 TL

9. elma = 2,75 TL, portakal = 3,25 TL

2. Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. 10 2. 8 3. 24

4. 58 5. $0 < x < 77$

6. a. biraz kilo fazlası b. 2

7. 334

3.1 Konu Sonu Değerlendirme Soruları

1. a. 15 b. 75 c. 48 d. 30

2. $2(x-3)-\frac{2x}{5}=67$

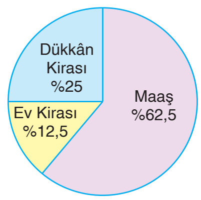
3. B 4. A 5. A 6. B

7. D 8. C 9. C 10. E

11. D 12. E 13. A 14. E

3. Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. a. Açık vermez.
b.



2. a. 3 b. Kazanamaz

3. Tren, 3105

3.2 Konu Sonu Değerlendirme Soruları

1.

Gelirler		Giderler			Yıllık Birikim
Aylık	Yıllık		Aylık	Yıllık	
3200	38400	Kira	700	8400	5400
		Fatura – Aidat	250	3000	
		Yiyecek	900	10800	
		Giyecek	400	4800	
		Diğer	500	6000	
		Aylık Toplam Gider	2750	–	
		Yıllık Toplam Gider	–	33000	

2. Gelir = 3300 TL, Gider = 3000 TL

3. 6900 TL 4. 6221 TL 5. E

3. Alt Öğrenme Alanı Testi

1. A 2. D 3. B 4. D
5. E 6. E 7. C 8. D
9. A 10. C 11. A 12. E
13. A 14. D 15. B 16. A
17. D 18. D 19. C 20. B
21. B 22. D 23. C

4. ALT ÖĞRENME ALANI

Bölüm 4.1. Hazır mısınız?

1. Dairenin 2. I ve III 3. C

4. a. 60° b. 60° c. 120°
d. 120° e. 180° f. 120°

5. a. 70° b. 250° c. 180°

6. a. 12,5 cm b. 25 cm
c. 50 cm d. 62,5 cm

7. A

1. Öğrendiklerimizi Uygulayalım

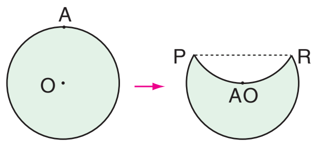
1. $5\sqrt{2}$ cm 2. c ve e

4.1 Konu Sonu Değerlendirme Soruları

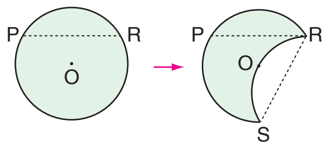
1. 3

2. a. çember b. 8 cm
c. içinde d. yarısıdır.

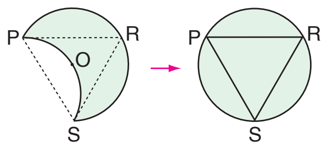
3. Çember üzerinde rastgele bir A noktası belirlenip bu nokta ile merkez üst üste gelecek şekilde katlanarak kat izinin çemberi kestiği noktalar P ve R olarak adlandırılır.



Daha sonra kâğıt R noktasından çemberin bir noktası O ile çakışacak şekilde yeniden katlanıp kat izinin çemberi kestiği yeni nokta S olarak adlandırılır.



Son olarak kâğıt [PS] kirişi oluşacak şekilde katlanırsa kat izi PRS eşkenar üçgenini oluşturur.



4. a. Y b. D c. Y d. D e. D

5. 38 br 6. 12

Bölüm 4.2. Hazır mısınız?

1. 180° dir. Çünkü iletki yarım çember yayı şeklindedir.

2. a. 3.00 ve 9.00 b. 6.00 c. 120

3. 135 4. 144

5. a. 255 b. |AC| = 85°, |BC| = 170°

6. a. 63° b. 180° c. 153° d. 333°

2. Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. a. 80° b. 100° c. 115°
d. 215° e. 260° f. 325°

2. 360 3. 60

4. a. 104 b. 56 c. 42
d. 148 e. 110 f. 26

5. 80

4.2 Konu Sonu Değerlendirme Soruları

1. C 2. 100 3. 50
4. 174 5. 90 6. 144

Bölüm 4.3. Hazır mısınız?

1. a. D b. Y c. Y d. D e. D

2. Konserve kutusunun taban çevresinin uzunluğunu hesaplamıştır.

3. a. π sayısı ile
b. çevresinden büyüktür.
c. çap uzunluğuna
d. 2 br dir.

4. a. 8π b. 20π c. 9 d. 50
e. 25π f. 121π g. 15 h. 6

3. Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. 240π 2. 4π 3. 5π cm 4. $4\pi+8$

5. $64 - 16\pi$ 6. $18\pi - 36$

4.3 Konu Sonu Değerlendirme Soruları

1. a ↔ 1, b ↔ IV, c ↔ II

2. 1115 3. 85,5 4. $12\sqrt{3} - 4\pi$

5. $6\pi - 9\sqrt{3}$ 6. 24

4. Alt Öğrenme Alanı Testi

1. B 2. C 3. E 4. C
5. A 6. B 7. D 8. C
9. E 10. B 11. A 12. E
13. E 14. B 15. E 16. A
17. A 18. B 19. D 20. E
21. D 22. E 23. B

A – B

avro: Avrupa Birliği'nin ortak para birimi.

balon: Isıtılmış hava veya havadan daha hafif bir gazla doldurulan, atmosferde uçabilen, küre biçiminde araç.

basınç: Bir yüzey üzerine etkide bulunan gücün yüz ölçümü birimine düşen miktarı.

boş küme: Elemanı olmayan küme.

bütçe: Devletin, bir kuruluşun, bir aile veya bir kimsenin gelecekteki belirli bir süre için tasarladığı gelir ve giderlerinin tümü.

Ç – D

çark: Bir eksenin döndürdüğü tekerlek biçimindeki makine parçası.

deniz feneri: Kıyıların tehlikeli yerlerinde, bazı kaya ve adacıkların üzerinde geceleri deniz taşıtlarına yol gösteren, tepesinde güçlü bir ışık kaynağı olan fener.

derece: Açı ölçme birimi.

domino: Üzerleri noktalarla işaretli dikdörtgen biçiminde yirmi sekiz taşla oynanan bir oyun.

dönme dolap: Eğlence alanlarında, bir eksen çevresinde yukarıdan aşağı dönen ve oturma yerleri olan eğlence aracı.

E – F

ekipman: Takım, araç gereç.

faaliyet: Çalışma.

G – H

geri dönüşüm: Atıkların yeniden değerlendirilmesi durumu.

gökdelen: Yirmi, otuz veya daha çok katlı yapı, göktırmalayan, gök tırmalayıcı.

gsm: Türkçesi mobil iletişim için küresel sistem olan cep telefonu iletişim protokolü.

hiyeroglif: Resim yazısı.

İ – K

ideal: Uygun.

ikamet: Bir yerde oturma.

ispat: Bir teoremin hükmünün doğru olduğunun gösterilmesi.

İnternet: Genel ağ.

kalem: Çeşit, tür.

kavşak: Yol vb. uzayıp giden şeylerin kesiştikleri veya birleştikleri yer.

kümes: Tavuk, hindi vb. evcil hayvanların barınmasına yarayan kapalı yer.

küsurat: Artan, geriye kalan parçalar, kesirler.

kumbara: Para biriktirmek için kullanılan, bozuk veya kâğıt para atılan deliği olan, metal, toprak, plastikten yapılmış küçük kap.

M – O

makara: Bir yükün yukarıya kaldırılmasını sağlayan araç.

menfaat: Çıkar.

mesai: Çalışma, emek.

Mısır piramidi: Mısır firavunlarının mezarı.

objektif: Fotoğraf makinesi, mikroskop, dürbün vb. optik aletlerde cisimlerden gelen ışınları alıp ekran üzerine aktaran mercek veya mercek sistemi.

operatör: İşletmen, servis sağlayıcı.

Ö – P

özerk: Bir üst organa bağlı olmakla beraber ayrı bir yasayla kendini yönetme yetkisi olan.

pergel: Yay veya çember çizmekte ve ölçmekte kullanılan araç, yayçizer.

pota: Basketbolda düşey bir levhaya monte edilmiş yatay çember ile ağdan meydana gelen düzenek.

prim: İşveren tarafından iş yapanı isteklendirip verimini artırmak veya sonuca daha kolay ve çabuk ulaşmasını sağlamak amacıyla verilen para.

proje: Belli bir programa göre inşa edilecek bir yapıların bütünü.

R – S

radar: Trafik polisleri tarafından kullanılan, taşıtların hızını saptamaya yarayan aygıt.

rota: Bir gemi veya uçağın gidiş yönü, izleyeceği yol.

rüzgârgülü: Kâğıt vb. malzemelerin özel bir biçimde katlanmasıyla yapılan ve rüzgârın etkisiyle dönen bir oyuncak.

saha: Takım oyunlarında karşılaşmaların yapıldığı yer.

sahne: İzleyicilerin kolayca görebilmeleri için genellikle yerden belli bir ölçüde yüksek yapılan, oyun, müzik vb. gösteri yapmaya uygun yer, oyunluk.

sarkaç: Durağan bir nokta çevresinde ağırlığının etkisiyle salınım yapan hareketli katı cisim.

sıralı ikili: Kartezyen çarpım kümesinin her bir elemanı.

stadyum: Takım oyunları, atletizm karşılaşmaları ve çeşitli törenlerin yapılabilmesi, seyircilerin de bunları izleyebilmesi için elverişli oturma yerleri olan alan, stat.

T – Ü

tahterevalli: İki ucuna birer kişi oturup karşılıklı olarak havada yükselip inerek eğlenmeyi sağlayan, ortasından bir yere dayalı tahta veya metal araç.

taksit: Bir borcun belli zamanlarda ödenmesi gerekli olan parçalarından her biri.

tarife: Fiyat gösteren çizelge.

tarla: Tarıma elverişli olan, sınırlı ve belirli toprak parçası.

tasarruf: Bir ekonomide belirli bir dönemde yaratılan gelirin tüketilmeyen kısmı.

tekne: Bir tür küçük deniz taşıtı.

transfer: Bir şeyi ya da kişiyi bir yerden alıp başka bir yere götürme.

ünite (kan): Yaklaşık olarak 450 ml kan.

üs: Bir kuvvete yükseltilmiş bir sayının üzerine yazılan ve kaçıncı kuvvete yükseltildiğini gösteren sayı.

V – Y

yüksek gerilim hattı : Otuz üç bin kilovattan elli dört bin kilovata kadar olan gerilim taşıyabilen enerji nakil hattı.

yükseklik : Bir üçgende ya da özel bir dörtgende bir köşeden karşı kenara ya da kenarın uzantısına indirilen dikme.

1. Barnett, R. A. (2001). *Precalculus: functions and graphs.* New York: McGraw - Hill.
2. Blitzer, R. (2003). *Thinking mathematically.* New Jersey: Prentice Hall.
3. Boll, M. (2004). *Matematik tarihi.* İstanbul: İletişim Yayınevi.
4. Boyd, C. ve Cummins, J. (2008). *Geometry.* New York: Glencoe / McGraw - Hill.
5. Cajori, F. (1929). *A history of mathematical notations (2 volumes).* Illinois: The Open Court Publishing Co.
6. Katz, V. J. (1993). *A history of mathematics: an introduction.* New York: Harper Collins College Publishers.
7. Haese, R. C. ve Harris, K.P. (2002). *Mathematics for year 10.* South Australia: Haese & Harris Publications.
8. Holliday, B. ve Cuevas, G. J. (2005). *Algebra 2.* New York: Glencoe / McGraw - Hill.
9. Schlager, N. ve Lauer, J. (2001). *Science and its times.* Hampshire: Gale Group.
10. Lynch, C. ve Olmstead, E. (2006). *Mathmatters 2.* New York: Glencoe / McGraw - Hill.
11. *T.C. Millî Eğitim Bakanlığı matematik dersi öğretim programı (ortaöğretim 9, 10, 11 ve 12. sınıflar).* (2018). Ankara: MEB Yayınları.
12. *T.C. Millî Eğitim Bakanlığı matematik dersi öğretim programı (ilkokul ve ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. sınıflar).* (2018). Ankara: MEB Yayınları.
13. *Türkçe sözlük.* (2012). Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları.
14. *Yazım kılavuzu.* (2012). Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları.
15. http://www.matematik.dpu.edu.tr/index/sayfa/3127/carl-friedrich-gauss (Erişim tarihi: 24.12.2018, Kullanıldığı sayfa: 5)
16. https://www.bkm.com.tr/pos-atm-kart-sayilari/ (Erişim tarihi: 03.05.2019, Kullanıldığı sayfa: 19)
17. http://www.matematik.dpu.edu.tr/index/sayfa/3124/pisagor (Erişim tarihi: 21.12.2018, Kullanıldığı sayfa: 42)
18. http://www.matematik.dpu.edu.tr/index/sayfa/3119/el-harezmi (Erişim tarihi: 20.12.2018, Kullanıldığı sayfa: 85)

1. Kitabımızdaki "http://www.shutterstock.com" adresinden satın alınan görsellerin sayfa numaraları ve görsel kodları aşağıda verilmiştir.

Sayfa 1/1: 1043644033, **1/2:** 323171963, **1/3:** 772600372, **1/4:** 1055076638

Sayfa 3: 474628912

Sayfa 4/1: 189851069, **4/2:** 1872687196

Sayfa 7: 167199710

Sayfa 11: 101323735

Sayfa 12: 695203303

Sayfa 13: 494682490

Sayfa 14: 373750987

Sayfa 17: 51417601

Sayfa 27: 1006041136

Sayfa 30: 517615312

Sayfa 39/1: 78345271, **39/2:** 308516972, **39/3:** 1033466158, **39/4:** 784180795

Sayfa 41: 518431780

Sayfa 44/1: 1130548316, **44/2:** 530736604

Sayfa 51: 25111642

Sayfa 59: 278722880

Sayfa 60: 689825026

Sayfa 63: 725532412

Sayfa 79/1: 691048219, **79/2:** 341721425, **79/3:** 139154477, **79/4:** 93054619

Sayfa 81: 441513310

Sayfa 82: 453386635

Sayfa 85: 93900091

Sayfa 86: 428260378

Sayfa 87/1: 1184482123, **87/2:** 1030637593

Sayfa 88: 1162255096

Sayfa 89/1: 535553893, **89/2:** 335217245

Sayfa 90: 197861240

Sayfa 92/1: 1393857446, **92/2:** 274942214, **92/3:** 79364278

Sayfa 93: 110696534

Sayfa 94/1: 558700402, **94/2:** 1194752749

Sayfa 95: 618126449

Sayfa 96/1: 247376929, **96/2:** 135418511, **96/3:** 167738897

Sayfa 97: 464813738

Sayfa 98: 176683400

Sayfa 99: 135383264

Sayfa 100: 460410118

Sayfa 101: 1209255553

Sayfa 102: 147158540

Sayfa 103/1: 6320506, **103/2:** 142414075

Sayfa 104/1: 116739469, **104/2:** 33615157

Sayfa 105: 206227795

Sayfa 106: 1448407754

Sayfa 107: 1131672200

Sayfa 108/1: 524947594, **108/2:** 757407100, **108/3:** 533680876

Sayfa 110/1: 343285469, **110/2:** 1067437643

Sayfa 111/1: 530508196, **111/2:** 358725134, **111/3:** 562773967

Sayfa 112/1: 553443175, **112/2:** 1084834556

Sayfa 113/1: 58286803, **113/2:** 175522820, **113/3:** 12114283, **113/4:** 1037185729

Sayfa 114/1: 328444964, **114/2:** 258150011, **114/3:** 531755383

Sayfa 116: 72942355

Sayfa 118: 126781457

Sayfa 122: 101526637

Sayfa 123: 162125309

Sayfa 131: 157279418

2. Kitabımızdaki kaynağı belirtilmeyen görseller yayınevimizin arşivine aittir.

3. Kitabımızdaki çizimler yayınevimizin görsel tasarım uzmanı tarafından çizilmiştir.

4. Sayfa 81: https://www.sivaskulturturizm.gov.trResim74485,sivas-ulu-camii-ve-minaresi-egilmektedir5.png0.png